Mathematik
Aufnahmeprüfung 2013
Profile m,n,s

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Zeit: 2 Stunden.
Rechner: TI30/TI34 oder vergleichbare.
Hinweis: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein, ansonsten werden keine Teilpunkte vergeben.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	3	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	5	47

2

Mathematik
Aufnahmeprüfung 2013
Profile m,n,s

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Vorname: **Name:**

Aufgabe 1

Die Zahl 72 lässt sich auf mehrere Weise als Summe von zwei Primzahlen schreiben:

$$72 \;=\; 13+59 \;=\; 41+31 \;=\; \ldots \;=\; 19+53$$

Wie lässt sich die Zahl 58 als Summe von zwei Primzahlen schreiben? Finde durch Probieren alle Möglichkeiten.

Aufgabe 2

Vereinfache den Term und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an:

$$\frac{3b+8ab}{\sqrt{2b^2\cdot 8b^2}}-\frac{9a-1}{3b}$$

Aufgabe 3

Löse die Gleichungen nach x auf. Gib das Resultat als ganze Zahl oder als gekürzten Bruch an.

(a)

$$3[2x-1-(1-x)] \;=\; 4x-2(2x+3)$$

(b)

$$1-2x \;=\; \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3x}{2}\right)-\frac{2x}{3}$$

Aufgabe 4

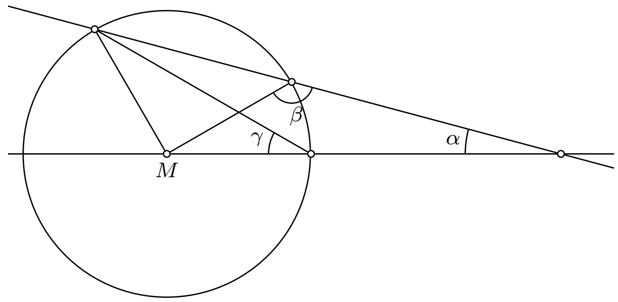
In einer Mensa werden jeden Tag drei verschiedene Gerichte angeboten. Menu A kostet Fr. 13.50, Menu B kostet Fr. 25.20, und Menu C kostet Fr. 11.70. Das Essen soll in Zukunft nicht mehr bar, sondern mit Essensmarken bezahlt werden.

Wie viele Rappen muss eine solche Marke kosten, damit jedes der drei Gerichte mit möglichst wenigen dieser Marken exakt bezahlt werden kann? Mit wie vielen Essensmarken müssen dann Menu A, B bzw. C bezahlt werden?

Hinweis: Rechne in Rappen.

Aufgabe 5

Betrachte die folgende Figur. Der Punkt M ist das Kreiszentrum. Der Winkel γ misst $36°$, der Winkel β ist gleich $130°$. Berechne den Winkel α.



Aufgabe 6

Eine Kompanie Soldaten übt das Marschieren. Am Vormittag marschieren sie in 4er Reihen (d.h. 4 Soldaten marschieren jeweils nebeneinander). Weil es nicht aufgeht, sind in der hintersten Reihe nur 3 Soldaten.
Am Nachmittag fehlen 3 Soldaten, weil sie Küchendienst haben. Jetzt wird in 6er Reihen marschiert. Es hat 7 Reihen weniger als am Vormittag, aber in allen Reihen marschieren genau 6 Soldaten.

Wie viele 6er Reihen hatte es am Nachmittag, und aus wie vielen Soldaten besteht die Kompanie?

Bezeichne die Anzahl 6er Reihen am Nachmittag mit x. Stelle eine Gleichung für x auf und löse sie.

Aufgabe 7

Zeichne ein Rechteck $ABCD$ dessen Seite AB doppelt so lang wie BC ist, sowie den Diagonalenschnittpunkt M. Konstruiere einen Punkt P im Inneren des Rechtecks mit den folgenden beiden Eigenschaften:
− Er hat zur Seite DC und der Diagonale AC denselben Abstand.
− Er ist von D und M gleichweit entfernt.

Aufgabe 8

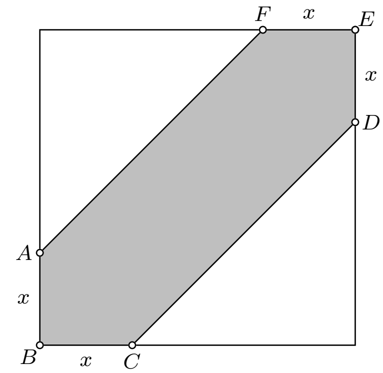
Ein Obsthändler kauft 10 Tonnen Tomaten in Italien. Der Transport in die Schweiz kostet ihn 700 Franken. Auf der Fahrt verderben 16% der Tomaten. Vom Rest kann er nur 90% verkaufen, wobei er 2.20 Franken pro kg verlangt. Insgesamt erzielt er damit einen Gewinn von 26% seiner Ausgaben.

(a) Wie viele kg Tomaten hat er verkauft?

(b) Wie viele Franken musste er für 1 kg Tomaten bezahlen?

Aufgabe 9

Die Abbildung zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge a cm. Die Punkte A und C liegen in x cm Entfernung von der Ecke B. Genau so liegen die Punkte D und F in x cm Entfernung von der Ecke E. So entsteht das Sechseck $ABCDEF$.

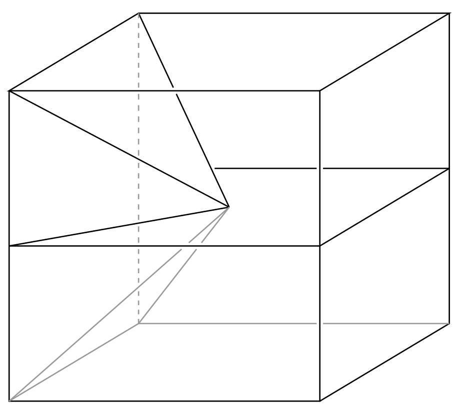


(a) Stelle eine Formel auf, mit der sich der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ aus a und x berechnen lässt.

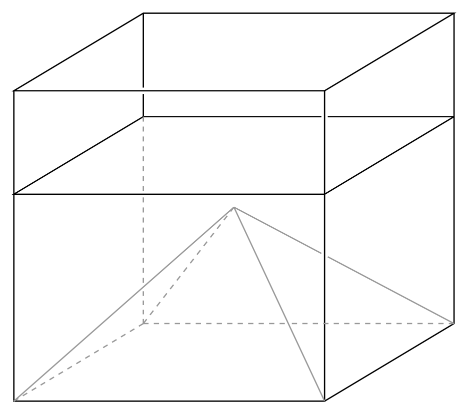
(b) Der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ sei $x \cdot (24 - x)$ cm^2. Ermittle durch Probieren mit dem Taschenrechner die Länge x auf mm genau so, dass der Flächeninhalt möglichst nahe an 72 cm^2 kommt.

Aufgabe 10

In einem geschlossenen Glaswürfel mit der Kantenlänge 12 cm ist an der linken Seitenfläche eine regelmässige quadratische Pyramide angebracht, in die kein Wasser eindringen kann. Die Spitze dieser Pyramide fällt mit dem Würfelmittelpunkt zusammen. Der Würfel ist bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt (Figur 1).



Figur 1



Figur 2

Der Glaswürfel wird nun auf die linke Seitenfläche gestellt (Figur 2). Auf welcher Höhe über dem Boden steht das Wasser in dieser Situation?

Aufgabe 11

Ein Hubschrauberpilot in Ausbildung muss folgenden Übungsparcours fliegen: Von seinem Startplatz aus zuerst 200 m senkrecht nach oben, dann auf gleicher Höhe 600 m nach Osten, danach 50 m senkrecht nach unten, sodann auf gleicher Höhe 300 m nach Norden.
Am Schluss muss er auf dem kürzesten Weg zurück zum Startplatz fliegen.

(a) Veranschauliche die Flugbahn durch eine räumliche Skizze.

(b) Wie lang ist dieser kürzeste Rückweg? Gib das Resultat auf Meter genau an.

Aufgabe 12

Gegeben sind zwei Punkte M und P, deren Abstand 3.5 cm beträgt. Konstruiere ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm und den folgenden beiden Eigenschaften:

- M ist der Mittelpunkt des Rechtecks.
- P liegt auf einer der vier Seiten des Rechtecks.

Führe die Konstruktion direkt auf diesem Blatt aus und schreibe dazu einen Konstruktionsbericht. Der Konstruktionsbericht soll so formuliert werden, dass die entscheidende Idee zum Ausdruck kommt, und die ausgeführte Konstruktion Schritt für Schritt nachvollziehbar ist.

Skizze:

Konstruktion:

$M \circ$ $\circ\, P$

Konstruktionsbericht:

Mathematik
Aufnahmeprüfung 2013
Profile m,n,s

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Lösungen (der Prüfung für die Schülerinnen und Schüler aus der **2.** Sekundarschule)

Lösung der Aufgabe 1

$$58 = 5+53 = 11+47 = 17+41 = 29+29$$

Lösung der Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\frac{3b+8ab}{\sqrt{2b^2\cdot 8b^2}}-\frac{9a-1}{3b} &= \frac{3b+8ab}{4b^2}-\frac{9a-1}{3b} = \frac{3(3b+8ab)}{12b^2}-\frac{4b(9a-1)}{12b^2}\\
&= \frac{9b+24ab-(36ab-4b)}{12b^2} = \frac{9b+24ab-36ab+4b}{12b^2}\\
&= \frac{13b-12ab}{12b^2} = \frac{b(13-12a)}{12b^2} = \underline{\underline{\frac{13-12a}{12b}}}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\frac{3b+8ab}{\sqrt{2b^2\cdot 8b^2}}-\frac{9a-1}{3b} &= \frac{3b+8ab}{4b^2}-\frac{9a-1}{3b} = \frac{b(3+8a)}{4b^2}-\frac{9a-1}{3b} = \frac{3+8a}{4b}-\frac{9a-1}{3b}\\
&= \frac{3(3+8a)-4(9a-1)}{12b} = \frac{9+24a-36a+4}{12b} = \underline{\underline{\frac{13-12a}{12b}}}
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}
3[2x-1-(1-x)] &= 4x-2(2x+3)\\
3[3x-2] &= -6\\
9x-6 &= -6\\
9x &= 0\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{\;=\; 0}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
1-2x &= \tfrac{1}{6}-\tfrac{3}{4}\cdot x-\tfrac{2}{3}\cdot x \quad \big|\cdot 12\\
12-24x &= 2-9x-8x\\
10 &= 7x\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{\;=\; \tfrac{10}{7}}}
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 4

Der Wert einer Marke ist der grösste gemeinsame Teiler von 1350, 2520 und 1170.

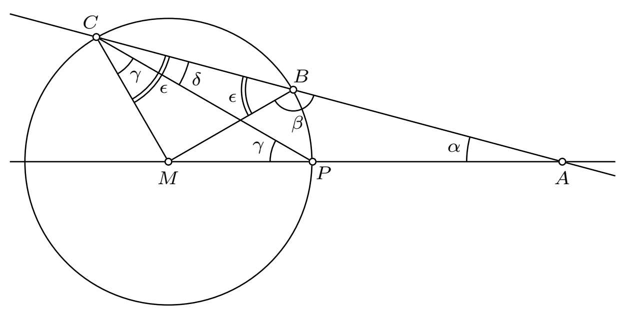
$$\left.\begin{array}{rcl} 1350 & = & 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \\ 2520 & = & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 1170 & = & 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \end{array}\right\} \quad \text{ggT} \;=\; 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \;=\; 90$$

Eine Marke kostet $\underline{\underline{\text{90 Rp.}}}$

$$\begin{array}{lll} \text{Anzahl benötigte Marken für das Menu} & A: & 1350 \div 90 = \underline{\underline{15}} \\ & B: & 2520 \div 90 = \underline{\underline{28}} \\ & C: & 1170 \div 90 = \underline{\underline{13}} \end{array}$$

Lösung der Aufgabe 5

Das Dreieck BMC ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\epsilon = 180° - \beta = 50°$.
Das Dreieck PMC ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\gamma = 36°$.
Folglich ist $\delta = \epsilon - \gamma = 50° - 36° = 14°$.



Im Dreieck APC misst der Winkel $\measuredangle APC = 180° - \gamma = 144°$. Also ist

$$180° \;=\; 144° + \delta + \alpha \;=\; 144° + 14° + \alpha \;=\; 158° + \alpha$$

und somit $\underline{\underline{\alpha = 22°}}$.

Lösung der Aufgabe 6

Sei x die Anzahl der 6er Reihen am Nachmittag. Die Anzahl der Soldaten am Vormittag ist gleich der Anzahl Soldaten am Nachmittag:

$$6x + 3 \;=\; 4(x + 6) + 3 \qquad \text{oder} \qquad 6x + 3 \;=\; 4(x + 7) - 1$$

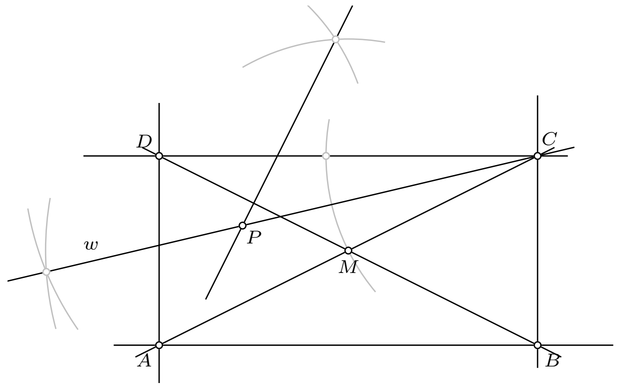
Die Berechnung von x:

$$\begin{array}{rcl} 6x + 3 & = & 4x + 27 \\ 2x & = & 24 \\ x & = & 12 \end{array}$$

Es waren $\underline{\underline{12}}$ Sechserreihen. Die Kompanie besteht aus $6 \cdot 12 + 3 = \underline{\underline{75}}$ Soldaten.

Lösung der Aufgabe 7

Der gesuchte Punkt P liegt auf der Winkelhalbierenden w von CD, CA. Der gesuchte Punkt P der Schnittpunkt von w und der Mittelsenkrechten von DM



Lösung der Aufgabe 8

(a) 16% von 10′000 kg sind 1600 kg. Es bleiben dem Händler 10′000 kg − 1600 kg = 8400 kg Tomaten. 90% von 8400 kg sind 7560 kg. Er verkauft $\underline{\underline{7560 \text{ kg}}}$ Tomaten.

(b) Seine Einnahmen betragen 7560 kg · 2.20 Fr/kg = 16632 Fr. Dies sind 126% der Gesamtkosten. Also betragen seine Ausgaben $\frac{100}{126} \cdot 16632$ Fr = 13200 Fr. Darin enthalten sind die Kosten für den Transport. Die Tomaten kosteten ihn demnach 13200 Fr − 700 Fr = 12500 Fr. Der Kilopreis beträgt also $\frac{12500 \text{ Fr}}{10'000 \text{ kg}} = \underline{\underline{1.25 \text{ Fr/kg}}}$.

Lösung der Aufgabe 9

(a) Der Flächeninhalt des Sechsecks entspricht der Fläche a^2 des Quadrats ohne die beiden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke. Die Längen der Katheten dieser Dreiecke ist $(a - x)$. Die Summe der beiden Dreicksinhalte ist folglich $(a - x)^2$. Also lautet der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$:

$$F \;=\; \underline{\underline{a^2 - (a-x)^2}} \;=\; 2ax - x^2 \;=\; x(2a - x)$$

Falls das Sechseck zusammengesetzt aus den beiden Dreiecken ABC, DEF und dem Rechteck $ACDF$ betrachtet wird:

$$F = \underline{\underline{x^2 + \sqrt{2} \cdot (a-x) \cdot \sqrt{2} \cdot x}} \;=\; x^2 + 2x(a-x) \;=\; 2ax - x^2 \;=\; x(2a-x)$$

(b) $\underline{\underline{x = 3.5 \text{ cm}}}$
[Die zweite Zahl $\underline{\underline{x = 20.5 \text{ cm}}}$, welche auch die Bedingung $x(24 - x) = 72$ erfüllt, wird als richtige Lösung gewertet].

Lösung der Aufgabe 10

Die Pyramide hat das Volumen $\frac{1}{3} \cdot 12^2\ \text{cm}^2 \cdot 6\ \text{cm} = 288\ \text{cm}^3$.
Das Wasservolumen V in der Situation von Figur 1:

$$V \;=\; \frac{1}{2} \cdot 12^3\ \text{cm}^3 - \frac{1}{2} \cdot 288\ \text{cm}^3 \;=\; 864\ \text{cm}^3 - 144\ \text{cm}^3 \;=\; 720\ \text{cm}^3$$

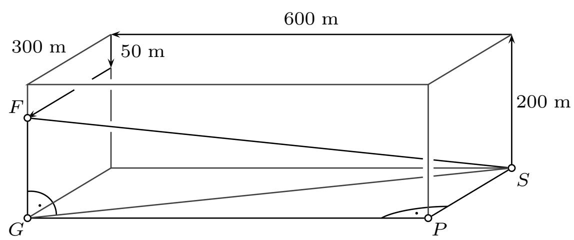
Sei x die gesuchte Höhe des Pegelstands. Dann gilt für das Wasservolumen

$$V \;=\; 12^2\ \text{cm}^2 \cdot x\ \text{cm} - 288\ \text{cm}^3 \;=\; 720\ \text{cm}^3$$

Folglich steht das Wasser auf der Höhe $\frac{720\ \text{cm}^3 + 288\ \text{cm}^3}{144\ \text{cm}^2} = \frac{1008\ \text{cm}^3}{144\ \text{cm}^2} \;=\; \underline{\underline{7\ \text{cm}}}$.

Lösung der Aufgabe 11

(a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck SPG mit den Kathetenlängen 600 m und 300 m gilt für die Hypotenuse

$$SG^2 \;=\; 300^2\ \text{m}^2 + 600^2\ \text{m}^2 \;=\; 450000\ \text{m}^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck SGF hat die Kathete FG die Länge $FG = 200\ \text{m} - 50\ \text{m} = 150\ \text{m}$. Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$FS^2 \;=\; SG^2 + FG^2 \;=\; 450000\ \text{m}^2 + 150^2\ \text{m}^2 \;=\; 450000\ \text{m}^2 + 22500\ \text{m}^2 \;=\; 472500\ \text{m}^2$$

Die Länge des kürzesten Wegs von F nach S misst demnach $\sqrt{472500}\ \text{m} = 687.39\ \text{m} \approx \underline{\underline{687\ \text{m}}}$

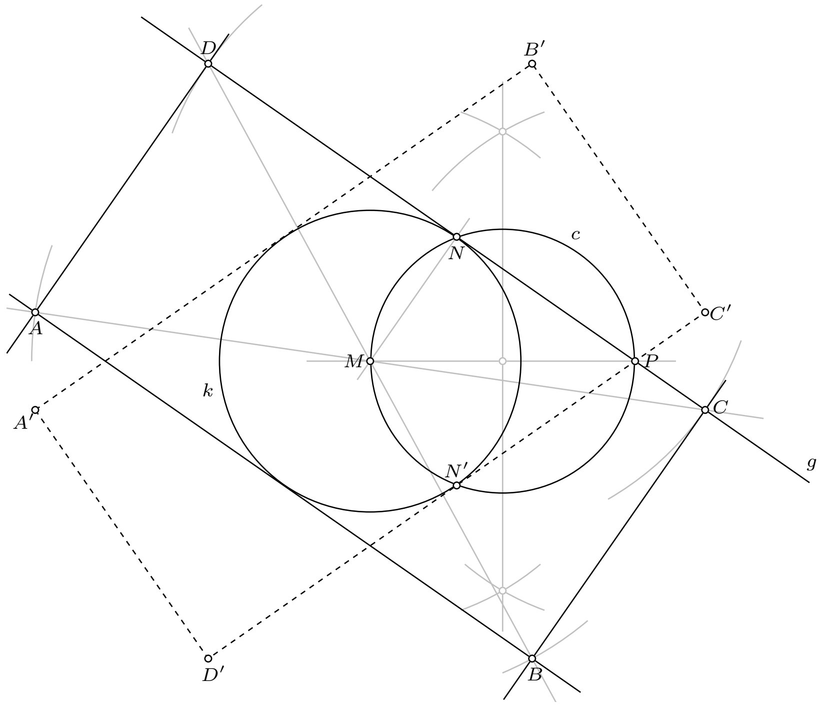
Lösung der Aufgabe 12

Konstruktionsbericht:

Die Mitte N der Seite CD bildet mit M und P ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse MP, und der Kathete MN der Länge 2 cm.

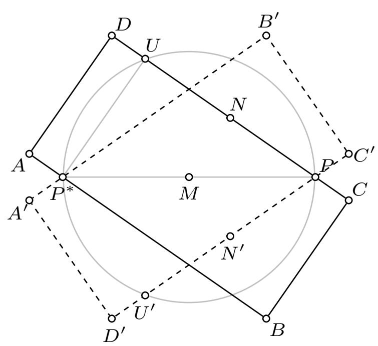
1. N ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über MP und dem Kreis k um M mit Radius 2 cm.
2. Die Rechtecksseite CD ist die Senkrechte g zu MN durch N. N ist die Mitte von CD.
3. Die Ecken C, D sind die Schnittpunkte von g mit dem Kreis um N mit Radius 4 cm.
4. Die Ecken A, B sind die an M gespiegelten Punkte C, D.

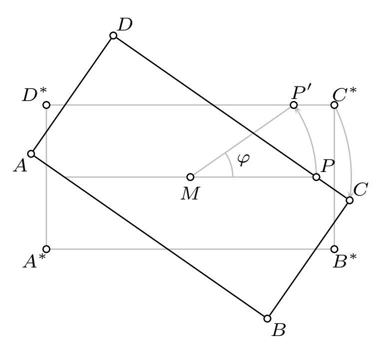
Konstruktion:



Weitere Konstruktionsvarianten:

(i) 1. Den Punkt P an M nach P^* spiegeln.
2. Das rechtwinklige Dreieck PP^*U mit der Hypotenuse PP^* und der Kathetenlänge $P^*U = 4$ cm.
3. Die Gerade PU ist die Seitengerade CD des gesuchten Rechtecks. Die Mitte N von PU ist auch die Mitte von CD.





(ii) 1. Irgend ein Rechteck $A^*B^*C^*D^*$ mit den Seitenlängen $A^*B^* = 8$ cm und $B^*C^* = 4$ cm, dessen Mittelpunkt M ist.
2. Dieses Rechteck mittels einer Drehung in die gesuchte Lage drehen.