**Mathematik**
**Aufnahmeprüfung 2013**
**Profile m,n,s**

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

**Zeit:** 2 Stunden.
**Rechner:** TI30/TI34 oder vergleichbare.
**Hinweis:** Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein, ansonsten werden keine Teilpunkte vergeben.

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **Summe** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 47 |

3

**Mathematik**
**Aufnahmeprüfung 2013**
**Profile m,n,s**

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

**Vorname:** **Name:**

## Aufgabe 1

Die Zahl 72 lässt sich auf mehrere Weise als Summe von zwei Primzahlen schreiben:

$$72 \;=\; 13+59 \;=\; 41+31 \;=\; \ldots \;=\; 19+53$$

Wie lässt sich die Zahl 58 als Summe von zwei Primzahlen schreiben? Finde durch Probieren alle Möglichkeiten.

## Aufgabe 2

Vereinfache den Term und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an:

$$\frac{3b+8ab}{4b^2}-\frac{9a-1}{3b}-1$$

## Aufgabe 3

Löse die Gleichungen nach $x$ auf. Gib das Resultat als ganze Zahl oder als gekürzten Bruch an.
(a)

$$3[2x-1-(1-x)] \;=\; 4x-2(2x+3)$$

(b)

$$1-2x \;=\; \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3x}{2}\right)-\frac{2x}{3}$$

## Aufgabe 4

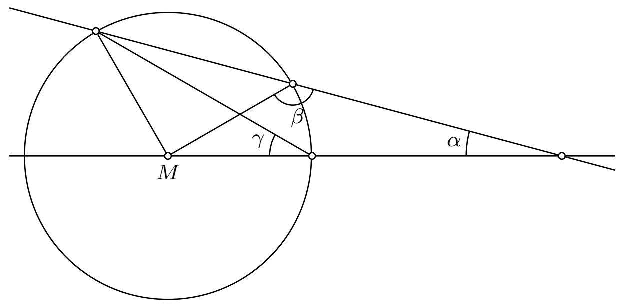
In einer Mensa werden jeden Tag drei verschiedene Gerichte angeboten. Menu $A$ kostet Fr. 13.50, Menu $B$ kostet Fr. 25.20, und Menu $C$ kostet Fr. 11.70. Das Essen soll in Zukunft nicht mehr bar, sondern mit Essensmarken bezahlt werden.

Wie viele Rappen muss eine solche Marke kosten, damit jedes der drei Gerichte mit möglichst wenigen dieser Marken exakt bezahlt werden kann? Mit wie vielen Essensmarken müssen dann Menu $A$, $B$ bzw. $C$ bezahlt werden?

Hinweis: Rechne in Rappen.

**Aufgabe 5**

Betrachte die folgende Figur. Der Punkt $M$ ist das Kreiszentrum. Der Winkel $\gamma$ misst $36°$, der Winkel $\beta$ ist gleich $130°$. Berechne den Winkel $\alpha$.




**Aufgabe 6**

Eine Kompanie Soldaten übt das Marschieren. Am Vormittag marschieren sie in 4er Reihen (d.h. 4 Soldaten marschieren jeweils nebeneinander). Weil es nicht aufgeht, sind in der hintersten Reihe nur 3 Soldaten.
Am Nachmittag fehlen 3 Soldaten, weil sie Küchendienst haben. Jetzt wird in 6er Reihen marschiert. Es hat 7 Reihen weniger als am Vormittag, aber in allen Reihen marschieren genau 6 Soldaten.

Wie viele 6er Reihen hatte es am Nachmittag, und aus wie vielen Soldaten besteht die Kompanie?

Bezeichne die Anzahl 6er Reihen am Nachmittag mit $x$. Stelle eine Gleichung für $x$ auf und löse sie.

**Aufgabe 7**

Zeichne ein Rechteck $ABCD$ dessen Seite $AB$ doppelt so lang wie $BC$ ist, sowie den Diagonalenschnittpunkt $M$. Konstruiere einen Punkt $P$ im Inneren des Rechtecks mit den folgenden beiden Eigenschaften:
– Er hat zur Seite $DC$ und der Diagonale $AC$ denselben Abstand.
– Er ist von $D$ und $M$ gleichweit entfernt.

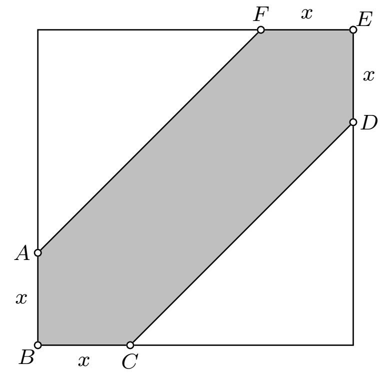
**Aufgabe 8**

Fink fährt mit dem Velo nach Hause, begleitet von seinem Hund. 100 m vor dem Haus trennt sich der Hund von Fink, rennt bis zur Haustüre und dann wieder zurück zu Fink. Der Hund rennt mit 10 m/s, Fink fährt mit 3.6 m/s. Wie viele Meter vor dem Haus trifft Fink auf seinen Hund?

Gib das Resultat in Meter auf eine Stelle nach dem Komma genau an.

**Aufgabe 9**

Die Abbildung zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge $a$ cm. Die Punkte $A$ und $C$ liegen in $x$ cm Entfernung von der Ecke $B$. Genau so liegen die Punkte $D$ und $F$ in $x$ cm Entfernung von der Ecke $E$. So entsteht das Sechseck $ABCDEF$.

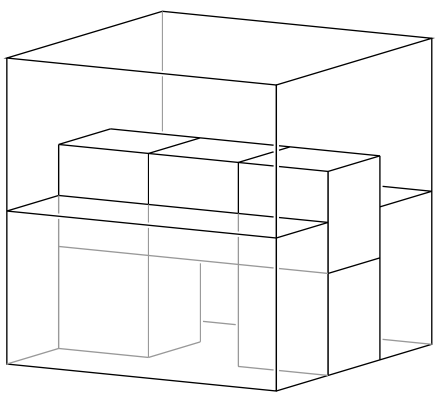



(a) Stelle eine Formel auf, mit der sich der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ aus $a$ und $x$ berechnen lässt.

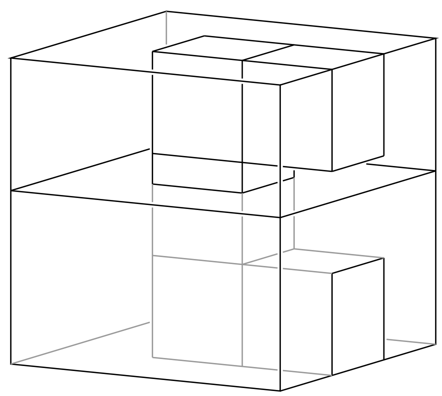
(b) Der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ sei $x \cdot (24 - x)$ cm$^2$. Ermittle durch Probieren mit dem Taschenrechner die Länge $x$ auf mm genau so, dass der Flächeninhalt möglichst nahe an 72 cm$^2$ kommt.

**Aufgabe 10**

In einem Plexiglaswürfel mit der Kantenlänge 18 cm ist ein Metallkörper eingebaut. Dieser Körper ist zusammengesetzt aus fünf gleichgrossen Würfeln der Kantenlänge 6 cm. Der Plexiglaswürfel ist zum Teil mit Wasser gefüllt. In der Ausgangslage (Figur 1) liegt die Wasseroberfläche 9 cm über der Bodenfläche.



Figur 1



Figur 2

Der Plexiglaswürfel wird nun auf eine Seitenfläche gestellt (Figur 2). Auf welcher Höhe über dem Boden steht das Wasser in dieser Situation?

**Aufgabe 11**

Ein Hubschrauberpilot in Ausbildung muss folgenden Übungsparcours fliegen: Von seinem Startplatz aus zuerst 200 m senkrecht nach oben, dann auf gleicher Höhe 600 m nach Osten, danach 50 m senkrecht nach unten, sodann auf gleicher Höhe 300 m nach Norden.
Am Schluss muss er auf dem kürzesten Weg zurück zum Startplatz fliegen.

(a) Veranschauliche die Flugbahn durch eine räumliche Skizze.

(b) Wie lang ist dieser kürzeste Rückweg? Gib das Resultat auf Meter genau an.

**Aufgabe 12**

Gegeben sind zwei Punkte $M$ und $P$, deren Abstand 3.5 cm beträgt. Konstruiere ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm und den folgenden beiden Eigenschaften:

– $M$ ist der Mittelpunkt des Rechtecks.
– $P$ liegt auf einer der vier Seiten des Rechtecks.

Führe die Konstruktion direkt auf diesem Blatt aus und schreibe dazu einen Konstruktionsbericht. Der Konstruktionsbericht soll so formuliert werden, dass die entscheidende Idee zum Ausdruck kommt, und die ausgeführte Konstruktion Schritt für Schritt nachvollziehbar ist.

Skizze:

Konstruktion:

$M \circ$ $\circ\, P$

Konstruktionsbericht:

**Mathematik**
**Aufnahmeprüfung 2013**
**Profile m,n,s**

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

**Lösungen** (der Prüfung für die Schülerinnen und Schüler aus der **3.** Sekundarschule)

---

**Lösung der Aufgabe 1**

$$58 = 5 + 53 = 11 + 47 = 17 + 41 = 29 + 29$$

**Lösung der Aufgabe 2**

$$\begin{aligned}
\frac{3b + 8ab}{4b^2} - \frac{9a-1}{3b} - 1 &= \frac{b(3+8a)}{4b^2} - \frac{9a-1}{3b} - 1 \\
&= \frac{3+8a}{4b} - \frac{9a-1}{3b} - 1 \\
&= \frac{3(3+8a)}{12b} - \frac{4(9a-1)}{12b} - \frac{12b}{12b} \\
&= \frac{9 + 24a - 36a + 4 - 12b}{12b} = \underline{\underline{\frac{13 - 12a - 12b}{12b}}}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\frac{3b + 8ab}{4b^2} - \frac{9a-1}{3b} - 1 &= \frac{3(3b+8ab)}{12b^2} - \frac{4b(9a-1)}{12b^2} - \frac{12b^2}{12b^2} \\
&= \frac{9b + 24ab - (36ab - 4b) - 12b^2}{12b^2} \\
&= \frac{9b + 24ab - 36ab + 4b - 12b^2}{12b^2} \\
&= \frac{13b - 12ab - 12b^2}{12b^2} = \frac{b(13 - 12a - 12b)}{12b^2} = \underline{\underline{\frac{13 - 12a - 12b}{12b}}}
\end{aligned}$$

**Lösung der Aufgabe 3**

(a)

$$\begin{aligned}
3[2x - 1 - (1 - x)] &= 4x - 2(2x + 3) \\
3[3x - 2] &= -6 \\
9x - 6 &= -6 \\
9x &= 0 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 0}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
1 - 2x &= \tfrac{1}{6} - \tfrac{3}{4} \cdot x - \tfrac{2}{3} \cdot x \quad \big| \cdot 12 \\
12 - 24x &= 2 - 9x - 8x \\
10 &= 7x \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= \tfrac{10}{7}}}
\end{aligned}$$

**Lösung der Aufgabe 4**

Der Wert einer Marke ist der grösste gemeinsame Teiler von 1350, 2520 und 1170.

$$\left.\begin{array}{rcl} 1350 & = & 2\cdot 3^3\cdot 5^2 \\ 2520 & = & 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 \\ 1170 & = & 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13 \end{array}\right\} \quad \text{ggT} \;=\; 2\cdot 3^2\cdot 5 \;=\; 90$$

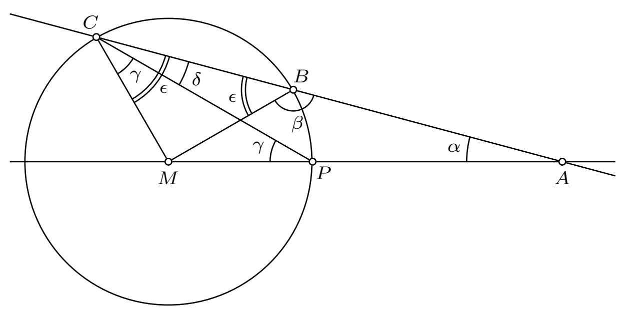
Eine Marke kostet $\underline{\underline{\text{90 Rp.}}}$

Anzahl benötigte Marken für das Menu

$$\begin{array}{ll} A: & 1350 \div 90 = \underline{\underline{\underline{15}}} \\ B: & 2520 \div 90 = \underline{\underline{\underline{28}}} \\ C: & 1170 \div 90 = \underline{\underline{\underline{13}}} \end{array}$$

**Lösung der Aufgabe 5**

Das Dreieck $BMC$ ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\epsilon = 180° - \beta = 50°$.
Das Dreieck $PMC$ ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\gamma = 36°$.
Folglich ist $\delta = \epsilon - \gamma = 50° - 36° = 14°$.




Im Dreieck $APC$ misst der Winkel $\measuredangle APC = 180° - \gamma = 144°$. Also ist

$$180° \;=\; 144° + \delta + \alpha \;=\; 144° + 14° + \alpha \;=\; 158° + \alpha$$

und somit $\underline{\underline{\alpha = 22°}}$.

**Lösung der Aufgabe 6**

Sei $x$ die Anzahl der 6er Reihen am Nachmittag. Die Anzahl der Soldaten am Vormittag ist gleich der Anzahl Soldaten am Nachmittag:

$$6x + 3 \;=\; 4(x+6) + 3 \qquad \text{oder} \qquad 6x + 3 \;=\; 4(x+7) - 1$$

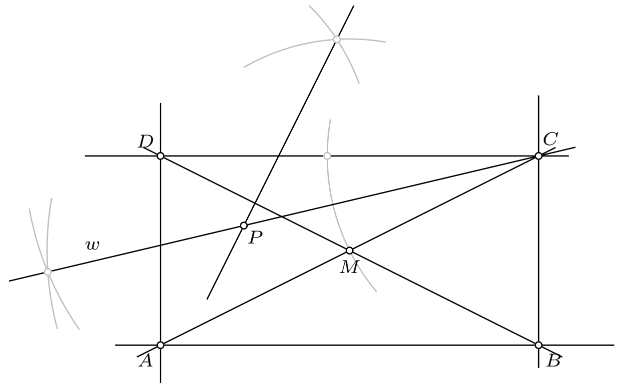
Die Berechnung von $x$:

$$\begin{array}{rcl} 6x + 3 & = & 4x + 27 \\ 2x & = & 24 \\ x & = & 12 \end{array}$$

Es waren $\underline{\underline{12}}$ Sechserreihen. Die Kompanie besteht aus $6\cdot 12 + 3 = \underline{\underline{75}}$ Soldaten.

**Lösung der Aufgabe 7**

Der gesuchte Punkt $P$ liegt auf der Winkelhalbierenden $w$ von $CD, CA$. Der gesuchte Punkt $P$ der Schnittpunkt von $w$ und der Mittelsenkrechten von $DM$




**Lösung der Aufgabe 8**

Bis zum Haus braucht der Hund $\dfrac{100\text{ m}}{10\text{ m/s}} = 10\text{ s}$.

In dieser Zeit nähert sich Fink dem Haus bis auf eine Distanz von $100\text{ m} - 3.6\text{ m/s} \cdot 10\text{ s} = 64\text{ m}$.

Die beiden treffen sich nach weiteren $\dfrac{64\text{ m}}{10\text{ m/s} + 3.6\text{ m/s}} \approx 4.706\text{ s}$

in ein der Distanz von $\approx 4.706\text{ s} \cdot 10\text{ m/s} \approx \underline{\underline{47.1\text{ m}}}$ vor dem Haus.

oder: Sei $x$ die gesuchte Distanz zum Haus in m. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{100-x}{3.6} &= \frac{100+x}{10} \\ 1000 - 10x &= 360 + 3.6x \\ 13.6x &= 640 \\ x &= 47.06 \end{aligned}$$

Sie treffen sich $\underline{\underline{47.1\text{ m}}}$ vor dem Haus.

**Lösung der Aufgabe 9**

(a) Der Flächeninhalt des Sechsecks entspricht der Fläche $a^2$ des Quadrats ohne die beiden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke. Die Längen der Katheten dieser Dreiecke ist $(a-x)$. Die Summe der beiden Dreicksinhalte ist folglich $(a-x)^2$. Also lautet der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$:

$$F \;=\; \underline{\underline{a^2 - (a-x)^2}} \;=\; 2ax - x^2 \;=\; x(2a-x)$$

Falls das Sechseck zusammengesetzt aus den beiden Dreiecken $ABC$, $DEF$ und dem Rechteck $ACDF$ betrachtet wird:

$$F = \underline{\underline{x^2 + \sqrt{2} \cdot (a-x) \cdot \sqrt{2} \cdot x}} \;=\; x^2 + 2x(a-x) \;=\; 2ax - x^2 \;=\; x(2a-x)$$

(b) $\underline{\underline{x = 3.5\text{ cm}}}$

[Die zweite Zahl $\underline{\underline{x = 20.5\text{ cm}}}$, welche auch die Bedingung $x(24-x) = 72$ erfüllt, wird als richtige Lösung gewertet].

**Lösung der Aufgabe 10**

Das Wasservolumen $V$ in der Situation von Figur 1: $V = 2 \cdot (6 \cdot 18 \cdot 9) + 6^3 = 2160$
Das Wasservolumen $V$ in der Situation von Figur 2 (wobei $x$ die Wasserhöhe über den untersten beiden Würfel bezeichnet):

$$V = (18^2 \cdot 6 - 2 \cdot 6^3) + (18^2 - 6^2) \cdot x \ = \ 1512 + 288x$$

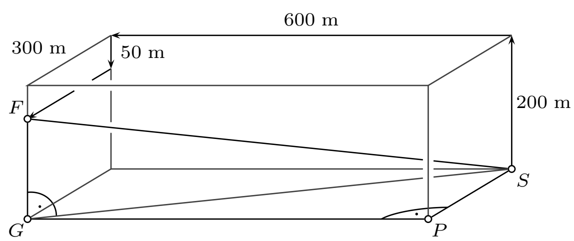
Also ist

$$\begin{aligned} 2160 &= 1512 + 288x \\ 648 &= 288x \\ x &= \frac{9}{4} = 2.25 \end{aligned}$$

Der Pegelstand beträgt 6 cm + 2.25 cm = $\underline{\underline{\text{8.25 cm}}}$

**Lösung der Aufgabe 11**

(a)




(b) Im rechtwinkligen Dreieck $SPG$ mit den Kathetenlängen 600 m und 300 m gilt für die Hypotenuse

$$SG^2 \ = \ 300^2 \text{ m}^2 + 600^2 \text{ m}^2 \ = \ 450000 \text{ m}^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck $SGF$ hat die Kathete $FG$ die Länge $FG = 200 \text{ m} - 50 \text{ m} = 150 \text{ m}$. Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$FS^2 \ = \ SG^2 + FG^2 \ = \ 450000 \text{ m}^2 + 150^2 \text{ m}^2 \ = \ 450000 \text{ m}^2 + 22500 \text{ m}^2 \ = \ 472500 \text{ m}^2$$

Die Länge des kürzesten Wegs von $F$ nach $S$ misst demnach $\sqrt{472500}$ m = 687.39 m ≈ $\underline{\underline{\text{687 m}}}$

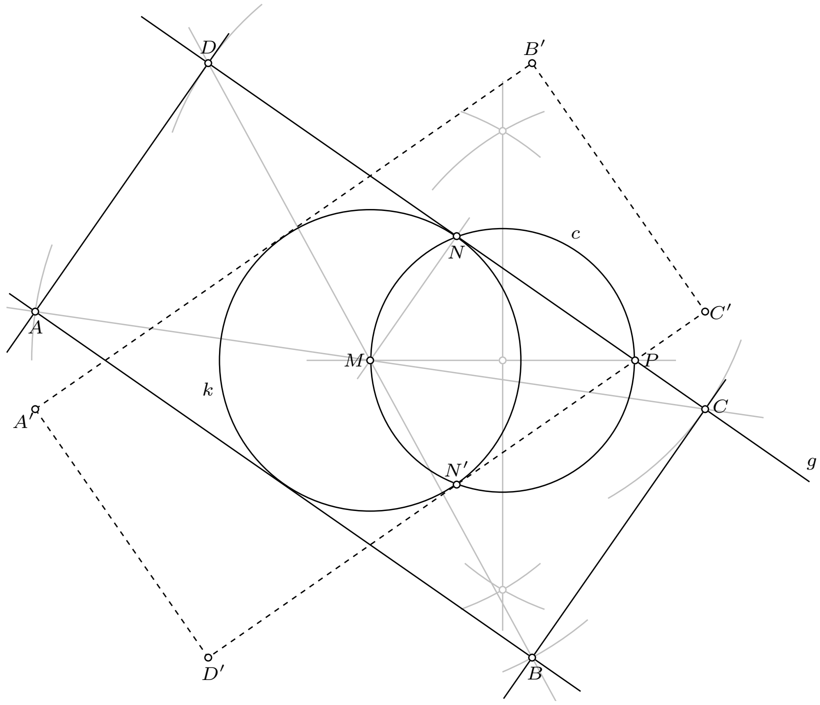
**Lösung der Aufgabe 12**

Konstruktionsbericht:

Die Mitte $N$ der Seite $CD$ bildet mit $M$ und $P$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $MP$, und der Kathete $MN$ der Länge 2 cm.

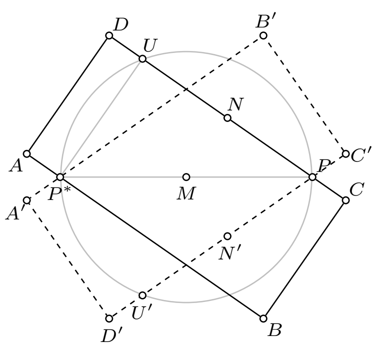
1. $N$ ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über $MP$ und dem Kreis $k$ um $M$ mit Radius 2 cm.
2. Die Rechtecksseite $CD$ ist die Senkrechte $g$ zu $MN$ durch $N$. $N$ ist die Mitte von $CD$.
3. Die Ecken $C, D$ sind die Schnittpunkte von $g$ mit dem Kreis um $N$ mit Radius 4 cm.
4. Die Ecken $A, B$ sind die an $M$ gespiegelten Punkte $C, D$.

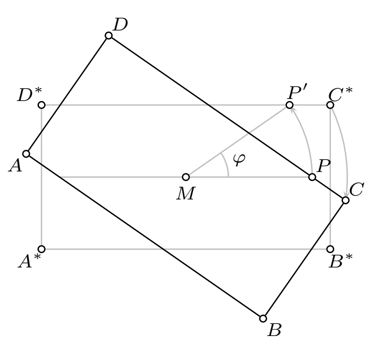
Konstruktion:




Weitere Konstruktionsvarianten:

(i) 1. Den Punkt $P$ an $M$ nach $P^*$ spiegeln.
2. Das rechtwinklige Dreieck $PP^*U$ mit der Hypotenuse $PP^*$ und der Kathetenlänge $P^*U = 4$ cm.
3. Die Gerade $PU$ ist die Seitengerade $CD$ des gesuchten Rechtecks. Die Mitte $N$ von $PU$ ist auch die Mitte von $CD$.




(ii) 1. Irgend ein Rechteck $A^*B^*C^*D^*$ mit den Seitenlängen $A^*B^* = 8$ cm und $B^*C^* = 4$ cm, dessen Mittelpunkt $M$ ist.
2. Dieses Rechteck mittels einer Drehung in die gesuchte Lage drehen.