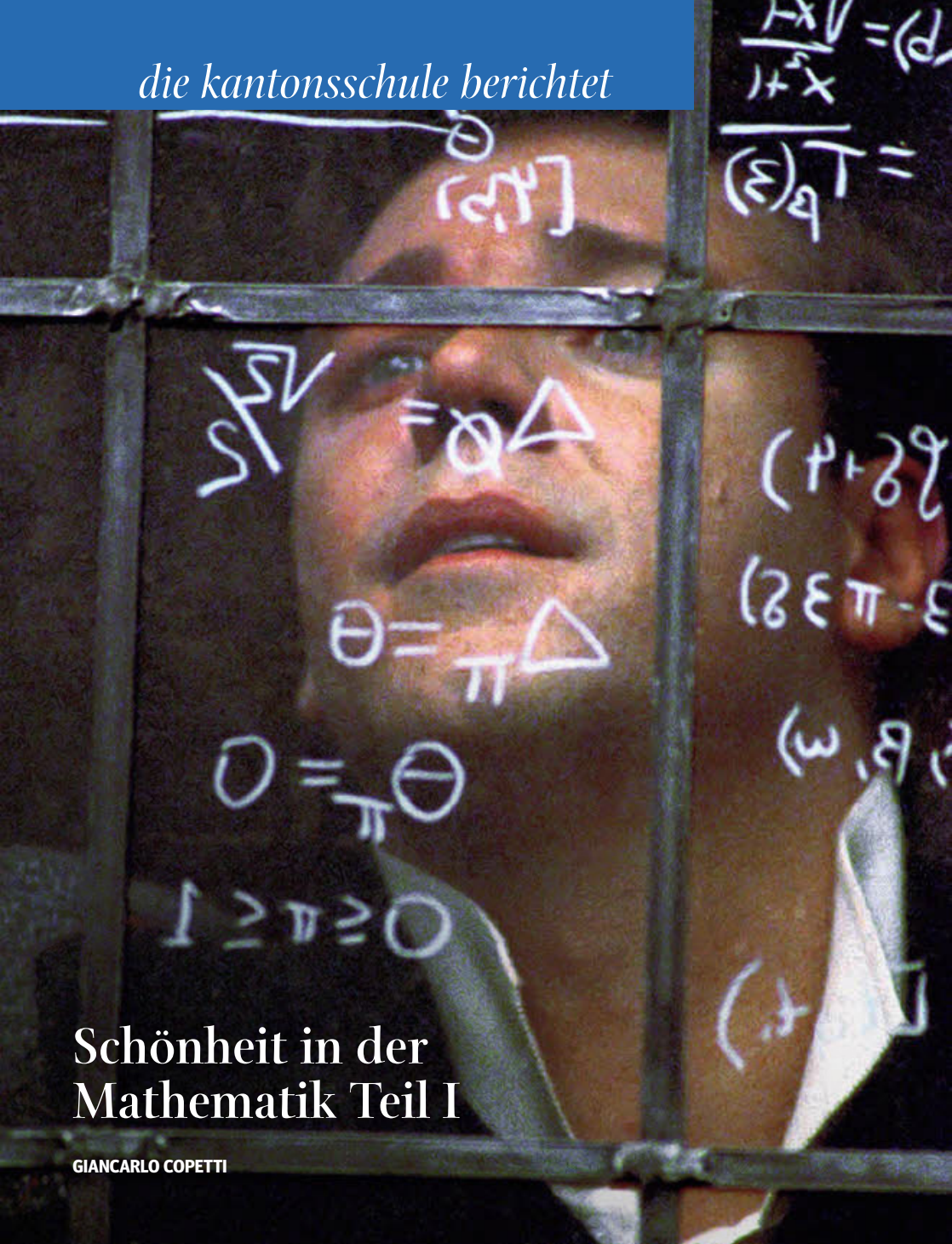


# Schönheit in der Mathematik Teil I

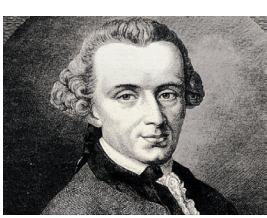
**GIANCARLO COPETTI**

## Schönheit, ein weites Feld …

So sicher wir uns wähnen zu wissen, was Schönheit sei, so schwer tun wir uns, wenn es darum geht, Schönheit zu beschreiben oder gar zu definieren. Jeder Erklärungsversuch gerät ins Stocken, und naturgemäss verfallen wir dann in das Aufzählen von Beispielen. Was ursprünglich als halbwegs theoretische Erörterung gedacht war, nimmt den Charakter einer hinweisenden Geste an. Die Schwierigkeit, Schönheit als Begriff zu fassen, rührt unter anderem auch daher, dass sie uns in unterschiedlichen, kaum vergleichbaren Sphären und in vielerlei Formen begegnet.

Schönheit kann uns in der Gestalt eines Menschen begegnen, nicht selten eine erste Voraussetzung für den Beginn des Verliebtseins. Wir können ein Gemälde als schön empfinden, das uns durch Farbe und Form verzaubert. Oder wir erleben Schönheit in der Musik, eine Ausdrucksform, welche die tiefsten Schichten der menschlichen Seele zu erreichen vermag. Die Ankunft auf einem Aussichtspunkt nach anstrengender Wanderung empfinden wir als Glücksgefühl und die majestätische Landschaft, die sich unserem umherschweifenden Blick bietet, als schön.

Der grosse deutsche Philosoph Immanuel Kant (1724–1804) hat in einem seiner drei Hauptwerke, der «Kritik der Urteilskraft», einen breiten Raum der Erörterung der Frage gewidmet, was Schönheit sei. Kants Gedankengänge sträflich verkürzend, könnte man etwa sagen, Schönheit sei das, was «interesseloses Wohlgefallen» hervorruft. Als Formel aufgefasst, gar nicht so schlecht. Schönheit wäre demnach insbesondere keine Sklavin irgendwelcher Interessen.



Definiert Schönheit als «interesseloses Wohlgefallen» – Immanuel Kant.

Erstaunlich finde ich, dass der Mensch überhaupt die Idee von Schönheit zu entwickeln vermag. Sie ist möglicherweise zunächst gespeist aus Kontexten, in denen sich Schönheit mit einem hohen Mass an Evidenz manifestiert. Dann auch aus der Erfahrung, dass sich zuweilen in ästhetischen Fragen, bei allen individuellen Unterschieden im Empfinden, ein Konsens einstellt. Ich will das nur andeutungsweise illustrieren. Bisweilen entflammen hitzige Debatten um Schönheit oder Hässlichkeit moderner Bauwerke. Noch nie aber ist mir jemand begegnet, der behauptet hätte, ein griechischer Tempel sei hässlich …

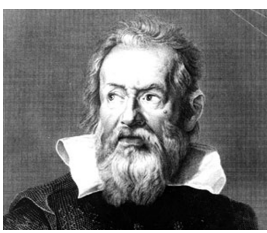
Der zu Ehren des Gottes des Feuers und der Schmiedekunst – Hephaistos – errichtete Tempel in Athen.

Ein Gemälde, ein Bauwerk muss man betrachten, ein musikalisches Werk muss man bewusst hören, um seine Schönheit zu erfahren. Theoretische Erörterungen – und seien sie noch so wortreich – können dafür kein Ersatz sein. Genauso verhält es sich mit der Schönheit in der Mathematik. Sie ist nicht zu erfahren, wenn man sich nicht mit mathematischen Fragestellungen auseinandersetzt. An einem Beispiel will ich deshalb Ihnen, geschätzte Leserinnen und Leser, die Möglichkeit einer solchen Erfahrung anbieten.
Mir ist klar, dass ich Ihnen damit eine Anstrengung zumute. Sie ist – gleichnishaft gesprochen – die vertretbare Anstrengung einer sonntäglichen Wanderung, die hoffentlich durch ein auch nach Ihrem Empfinden schönes Landschaftspanorama belohnt wird.

## Eine Hitparade der mathematischen Sätze

Die Mathematik ist eines der grössten, spannendsten und erfolgreichsten Unterfangen, auf die sich der menschliche Geist eingelassen hat. Was mit Zählen und dem Zeichnen von geometrischen Figuren seinen Anfang genommen hat, hat sich im Laufe der Jahrhunderte zu einer weitverzweigten Wissenschaft entwickelt.

Die Beschäftigung mit Mathematik führt zu überraschenden und bezaubernden Einsichten, die im kantschen Sinn «interesseloses Wohlgefallen» hervorrufen. Ausserdem ist die Mathematik, wie schon Galileo Galilei (1564–1642) ahnungsvoll und bis zum heutigen Tag unwiderlegt formuliert hat, «die Sprache, in welcher das Buch der Natur verfasst ist». Die moderne Physik wäre ohne Mathematik undenkbar. Das Verhältnis ist seit Galileis Zeiten von Gegenseitigkeit geprägt. Unschätzbar sind die Impulse, welche die Mathematik von der Physik erhalten hat und erhält. Und schliesslich gibt es einen für den Laien unvorstellbaren, reichhaltigen Beitrag der Mathematik jenseits des Feldes, das man mit der Formel vom «interesselosen Wohlgefallen» abgrenzen kann.



Galileo Galilei: «Mathematik ist die Sprache, in welcher das Buch der Natur verfasst ist»

**Mathematische Konzepte und Methoden ermöglichen beispielsweise:**

- grossartige Errungenschaften der Ingenieurwissenschaften,
- die gesamte moderne Kommunikationswelt (Computer, Internet, Handy),
- leistungsfähige diagnostische Hilfsmittel in der Medizin, wie etwa bildgebende Verfahren,
- das moderne Versicherungswesen (Pensionskassen, Kranken- und Lebensversicherungen, etc.)
- Wetterprognosen

Die Mehrheit der Nutzniesser merkt nichts davon – und weiss nichts davon. Die Mathematik tritt hinter ihren Anwendungen zurück …

Doch zurück zum eigentlichen Thema. Im Zusammenhang mit Mathematik von Schönheit zu reden, mag einige befremden, zumal jene, die im Mathematikunterricht vornehmlich gelitten haben. Und dennoch ist gerade für den Mathematiker die Ästhetik, nebst der Korrektheit der Argumente, eine zentrale Kategorie.

«Das Leben der Götter ist Mathematik. Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker ist Enthusiast per se. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik.» Wer sich jetzt fragen mag, welcher Mathematiker in solch schwärmerischen Taumel geraten ist, sucht in der falschen Richtung. Die Hymne an die Mathematik stammt aus der Feder von Georg Philipp Friedrich Freiherr von Hardenberg, besser bekannt unter dem Namen Novalis (1772–1801). Er zählt zu den grossen Dichtern der deutschen Romantik.

Mathematiker sind üblicherweise, bei aller naturgemässen Begeisterung für ihre Disziplin, etwas zurückhaltender. Gleichwohl würden sie Novalis, wenigstens was seine Einschätzung der Rolle des Enthusiasmus betrifft, vermutlich mehrheitlich zustimmen. Und ziemlich sicher gehen sie einig mit dem bedeutenden englischen Mathematiker Godfrey Harold Hardy (1877–1947), wenn er sagt: «In der Welt gibt es keinen Platz für hässliche Mathematik.»

Die menschliche Neigung, Hierarchien festzulegen, muss einige Mathematiker dazu inspiriert haben, einen Schönheitswettbewerb für mathematische Sätze zu lancieren. Mit dem Begriff «Satz» ist in diesem Zusammenhang eine wahre Aussage mathematischen Inhalts gemeint. Vor rund zwanzig Jahren bat die Zeitschrift «The Mathematical Intelligencer» ihre Leser, unter 24 Vorschlägen die schönsten mathematischen Sätze zu nominieren. Aufgrund der eingegangenen Vorschläge ist eine Liste der Top Ten entstanden. Wodurch zeichnen sich die Sätze aus, die es schliesslich in diese Top Ten geschafft haben? Worin besteht ihre Schönheit?

Wie schon eingangs angedeutet, eine schwierige Frage. Gleichwohl ist es möglich, wenigstens Hinweise auf mögliche Kriterien zu geben. Mit Bestimmtheit ist einem schönen mathematischen Satz eine erstaunliche, verblüffende Aussage zu eigen. Eine Aussage, die unerwartete Zusammenhänge offenlegt. Die Schönheit erfährt eine Steigerung, wenn sich der Satz durch eine raffinierte, elegante Argumentation begründen lässt, insbesondere, wenn sich die Begründung angesichts der Tiefe des Satzes als «einfach» herausstellt.

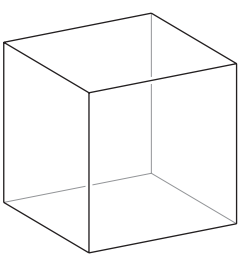
In der 1990 ermittelten Liste der Top Ten ist Leonhard Euler (1707–1783) gleich mehrfach vertreten, nämlich auf den Plätzen 1, 2 und 5.

Leonhard Euler, einer der grössten Mathematiker des 18. Jahrhunderts und einer der leuchtendsten Sterne am mathematischen Firmament überhaupt, war Schweizer, geboren in Riehen bei Basel. Den grössten Teil seines Lebens aber verbrachte er fern seiner Heimat. Nach einem vierzehnjährigen Aufenthalt in St. Petersburg und anschliessenden fünfundzwanzig Jahren in Berlin, kehrte er für die restlichen siebzehn Jahre seines Lebens nach St. Petersburg zurück. Seine Produktivität auf dem Gebiet der Mathematik und Physik ist, sowohl was den Umfang als auch die Substanz betrifft, atemberaubend. Mit der Herausgabe des Gesamtwerks – der Opera Omnia – ist die Euler-Kommission der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften betraut. Der erste Band ist 1911 erschienen. Die Arbeit dauert heute noch an. Wenn sie einmal abgeschlossen sein wird, wird Eulers Opera Omnia 80 (!) Bände oder mehr als 25 000 (!) Seiten umfassen. Seine Schriften zeichnen sich nicht nur durch mathematische Brillanz aus, sondern auch durch einen beispielhaft verständlichen Stil. Den Ausruf des französischen Mathematikers Pierre-Simon Laplace (1749–1827) «Lest Euler, lest Euler, er ist unser aller Meister!» darf man auch heute noch getrost angehenden (und gestandenen) Mathematikern ans Herz legen.

Leonhard Euler
(1707–1783)

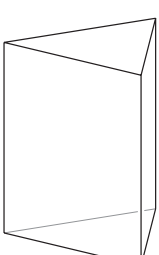
## Eine erstaunliche Entdeckung

Was liegt also näher, als eine Entdeckung des grossen Meisters als Illustration für mathematische Schönheit beizuziehen? Schon Kinder kommen in Berührung mit Modellen jener Objekte, die irgendwann Eulers Interesse geweckt haben: Holzklötzchen. Wir lenken unser Augenmerk auf solche, die Ecken, ausschliesslich geradlinige Kanten und ausschliesslich ebene Flächen aufweisen und sich zudem mit jeder Fläche als «Boden» auf den Tisch legen lassen. Man nennt solche Körper konvexe Polyeder. Der Begriff «Polyeder» kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie «Vielflächner». Der Gestaltenreichtum ist unüberschaubar, es gibt unendlich viele konvexe Polyeder. Am vertrautesten ist sicher der Würfel.

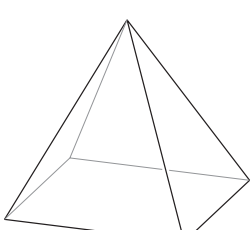


Seine Seitenflächen sind lauter Quadrate, 6 insgesamt. Er hat 8 Ecken und 12 Kanten. Aber auch Prisma, Pyramide, Bienenwabe, Oktaederstumpf gehören zur Familie der konvexen Polyeder.

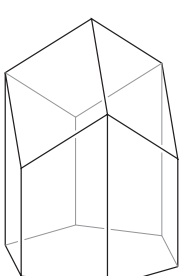
Seit der Antike von besonderem Reiz sind, nebst dem Würfel (auch Hexaeder genannt), wegen ihrer Regelmässigkeit die übrigen sogenannten regulären Polyeder: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder.



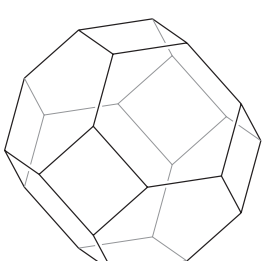
Prisma



Pyramide

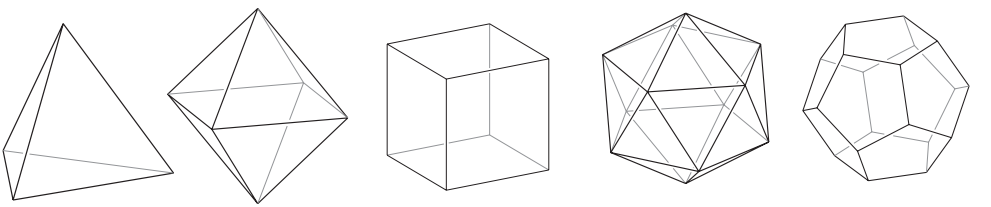


Bienenwabe



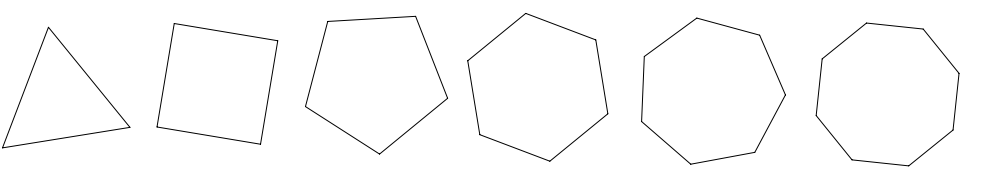
Oktaederstumpf

Ihre sie auszeichnende Eigenschaft ist, dass sie aus lauter regelmässigen Vielecken aufgebaut sind, nämlich gleichseitige Dreiecke (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder), Quadrate (Hexaeder), regelmässige Fünfecke (Dodekaeder).



Tetraeder Oktaeder Hexaeder (Würfel) Ikosaeder Dodekaeder

Nun gibt es unendlich viele regelmässige Vielecke.



Regelmässiges Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Achteck, ...

Man könnte daher vermuten, dass es auch unendlich viele reguläre Polyeder gibt. Das ist aber nicht der Fall. In Tat und Wahrheit gibt es nur die fünf genannten! Erstaunlich – finden Sie nicht? Dieser Satz, dass es genau fünf reguläre Polyeder gibt, rangiert übrigens in den erwähnten Top Ten auf Platz 4.

Der griechische Philosoph Plato (427 v. Chr. – 347 v. Chr.) entwickelt in seinem Dialog «Timaios» eine grossartige Spekulation zur Erklärung des Aufbaus des Kosmos. In diesem Entwurf spielen die fünf regulären Polyeder eine wichtige Rolle. Platon zu Ehren nennt man sie Platonische Körper.

Kommen wir nun zu Eulers Entdeckung. Irgendwann ist er auf die Idee verfallen, von konvexen Polyedern die Ecken, Flächen und Kanten zu zählen. Wenn man das erste Mal von dieser Idee hört, ist man möglicherweise verwundert, vielleicht auch erheitert, weil man sich fragt, was dabei schon herauskommen soll. Man könnte ja gerade so gut die Autos auf einem Parkplatz zählen oder die Schwäne an der Schifflände, die gerade mit altem Brot gefüttert werden. Ein langweiliges Unterfangen, könnte man meinen. Doch weit gefehlt! Die Idee des Zählens der Ecken, Flächen und Kanten eines konvexen Polyeders verhilft einem zu einer überraschenden Entdeckung.

Geschätzte Leserinnen und Leser, darf ich Sie zum Zählen einladen? Zählen Sie doch bitte die Ecken, Flächen und Kanten der einzelnen, oben vorgestellten Polyeder. Stellen Sie der besseren Übersicht halber die Ergebnisse Ihrer Zählung in einer Tabelle zusammen. Über den Würfel (Hexaeder) haben wir uns ja schon unterhalten. Die zu ihm gehörigen Anzahlen sind bereits eingetragen.

| **Polyeder** | **Anzahl Ecken E** | **Anzahl Flächen F** | **Anzahl Kanten K** |
|---|---|---|---|
| Hexaeder (Würfel) | 8 | 6 | 12 |
| Prisma | | | |
| Pyramide | | | |
| Bienenwabe | | | |
| Oktaederstumpf | | | |
| Tetraeder | | | |
| Oktaeder | | | |
| Ikosaeder | | | |
| Dodekaeder | | | |

Schauen Sie sich Ihre Ausbeute genau an. Lassen Sie sich Zeit. Fällt Ihnen ein Zusammenhang zwischen den ermittelten Zahlen auf?

In der Ausgabe von nächster Woche wird der Schleier gelüftet …