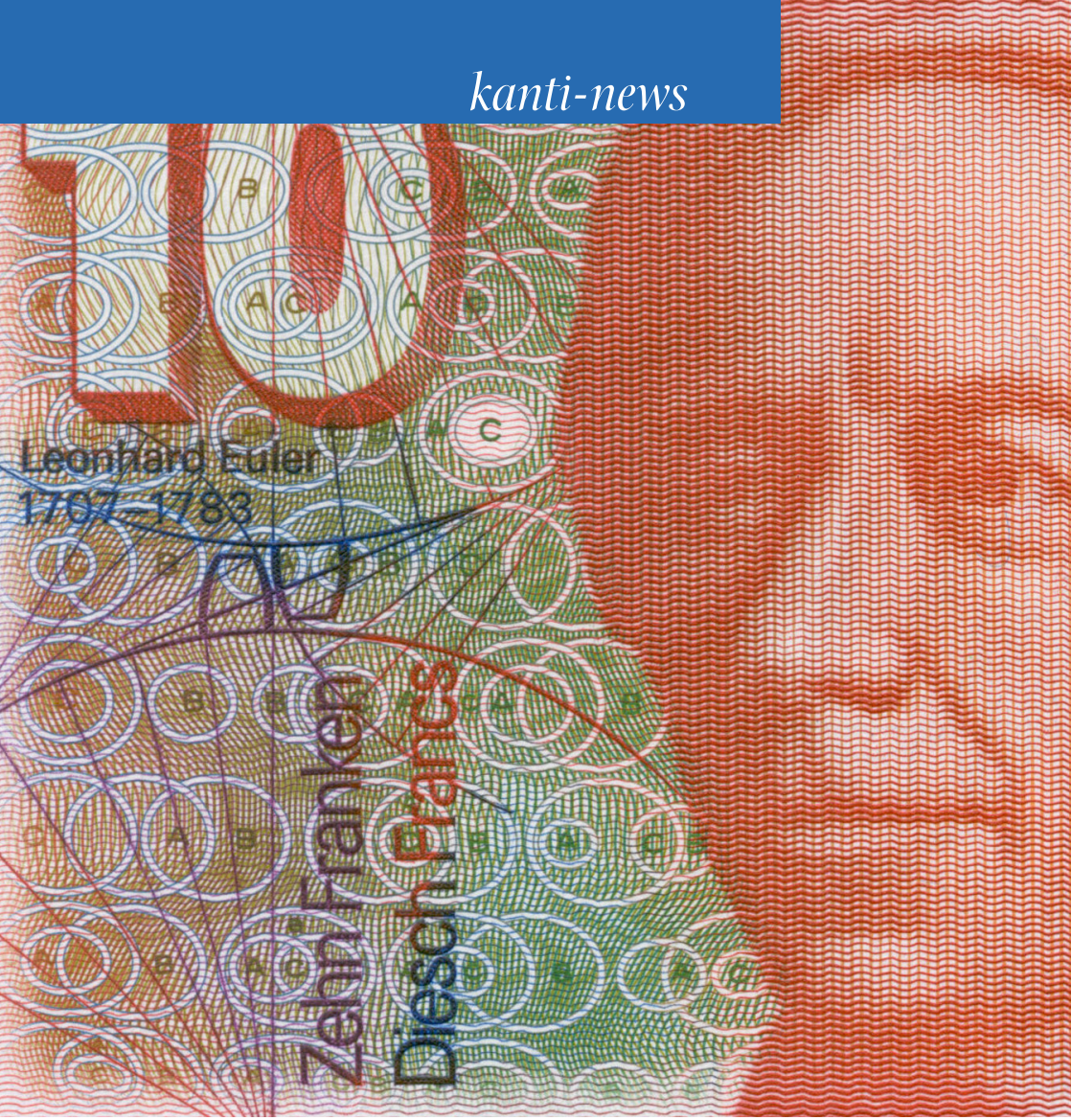


Schönheit in der Mathematik Teil II

GIANCARLO COPETTI

Von der Vermutung zur Gewissheit

Geschätzte Leserinnen und Leser! Erinnern Sie sich noch? An die in der letzten Ausgabe aufgeworfene Frage, welcher Zusammenhang zwischen der Anzahl E der Ecken, der Anzahl F der Flächen und der Anzahl K der Kanten eines konvexen Polyeders besteht?

Vielleicht haben Sie sich vergeblich den Kopf zerbrochen und Ihnen ist an den Zahlen, die Sie zusammengetragen haben, weiter nichts besonderes aufgefallen. Vielleicht haben Sie aber auch, wie seinerzeit Leonhard Euler, gemerkt, dass man für den Ausdruck «Ecken plus Flächen minus Kanten», also für $E + F - K$, bei allen getesteten Polyedern denselben Wert erhält – nämlich 2.

Polyeder	Anzahl Ecken E	Anzahl Flächen F	Anzahl Kanten K	Ecken plus Flächen minus Kanten E+F–K
Würfel (Hexaeder)	8	6	12	2
Prisma	6	5	9	2
Pyramide	5	5	8	2
Bienenwabe	13	10	21	2
Oktaederstumpf	24	14	36	2
Tetraeder	4	4	6	2
Oktaeder	6	8	12	2
Ikosaeder	12	20	30	2
Dodekaeder	20	12	30	2

Ist das nicht eine erstaunliche Beobachtung? Obwohl sich die einzelnen Anzahlen von Ecken, Flächen und Kanten von Polyeder zu Polyeder unterscheiden – die Kombination $E + F - K$ führt in allen Beispielen zum Wert 2!

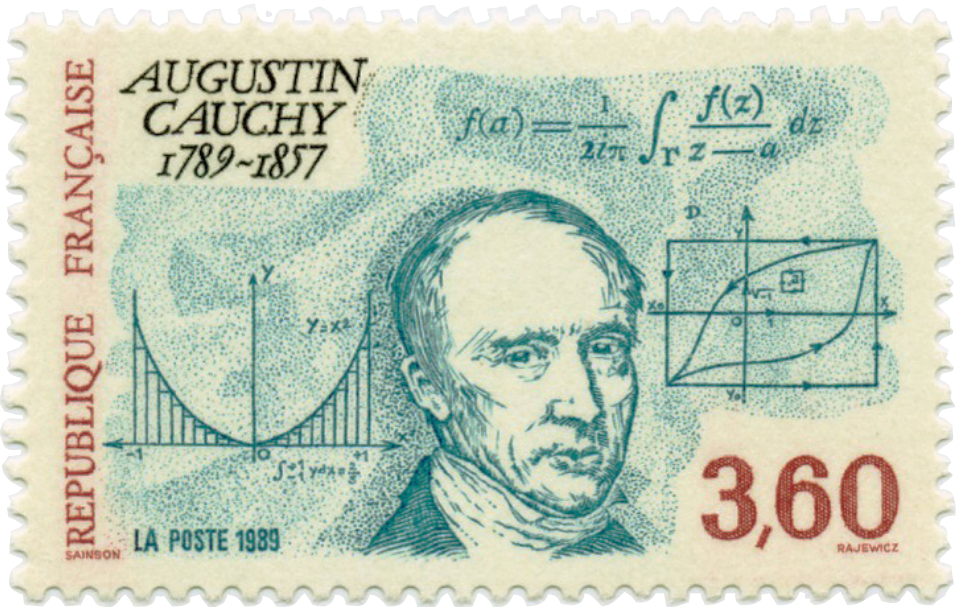
Es lohnt sich, an dieser Stelle einen Moment innezuhalten. Es gibt unendlich viele konvexe Polyeder. Angenommen, es würde für *alle* $E + F - K = 2$ gelten – dann wäre das eine Sensation!

Mittlerweile ist die Sensation mit *Gewissheit* perfekt! Aber wie nur hat man sicherstellen können, dass es keine Ausnahmen gibt? Etwa indem man weitere Beispiele ausgezählt hat? Wohl kaum. Auch wenn man hundert, tausend, zehntausend konvexe Polyeder auszählen würde und dabei in allen Fällen auf $E + F - K = 2$ stossen würde – es blieben immer noch unendlich viele weitere Beispiele übrig. Egal, wie viele Polyeder man auszuzählen vermag – es gibt immer noch unendlich viele, die man naturgemäss nicht berücksichtigt hat. Und unter diesen unendlich vielen könnte es eines oder gar mehrere geben, für die eben $E + F - K$ nicht den Wert 2 hat!

Eine Vermutung, die von Beispielen nahegelegt wird – und seien es noch so viele an der Zahl –, kann nicht als gesichert gelten. Die Erfahrung – im Rahmen mathematischer Tätigkeit, aber auch im Leben – zeigt, dass ungesicherte Verallgemeinerungen die Gefahr des Irrtums bergen. Den alten Griechen verdankt die Mathematik die Idee, an Vermutungen nicht einfach ungeprüft festzuhalten, sondern sie entweder durch ein *Gegenbeispiel* zu *entkräften* oder durch einen *Beweis* ein für alle Mal *sicherzustellen*. Erst eine strenge Begründung, ein logisch einwandfreier und lückenloser Beweis, vermag einer Vermutung den Rang eines mathematischen Satzes zu verleihen. Es ist die Strenge – und damit die Sicherheit ihrer Aussagen –, die der Mathematik zum Status eines Vorbildes für Wissenschaft überhaupt verholfen hat.

Die nächste interessante Frage ist also die nach einem Beweis. Wie kann man sich überzeugen, dass obige Entdeckung für *alle* konvexen Polyeder zutrifft, dass sie also *allgemeingültig* ist?

Beweise erfordern vor allem Intuition, Ideenreichtum, Fantasie. Man muss sich unter Umständen lange mit dem Gegenstand auseinandersetzen, bis man ein Gefühl für das Problem entwickelt, bis sich der eine oder andere Einfall einstellt, der sich zumindest als prüfenswert empfiehlt. Irrwege sind oft die Regel, bevor man einen gangbaren Weg zu finden vermag. Und selbst wenn man einen Beweis gefunden hat, stellt sich die Frage, ob es möglicherweise einen einfacheren, eleganteren gibt. Die zur Diskussion stehende Vermutung, dass $E + F - K = 2$ gilt, lässt sich beispielsweise auf unterschiedliche Arten begründen.

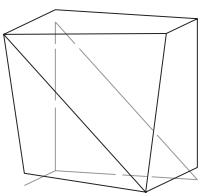


Augustin Cauchy (1789–1857), verewigt auf einer Briefmarke der französischen Post.

Ich lege im Folgenden nicht den eulerschen Beweis dar, sondern jenen des französischen Mathematikers Augustin Cauchy (1789–1857). Möglicherweise geleitet von einem Hauch Nostalgie: Er ist der erste Beweis, dem ich seinerzeit begegnet bin. Ich mag mich noch genau erinnern, wie fasziniert ich damals von diesem Beweis war. Die Argumentation ist genial. Gleichwohl ist sie erstaunlich *einfach*! Dabei meine ich mit «einfach» nicht, dass die Beweisidee einem mit Leichtigkeit einfällt, sondern vielmehr, dass sie sich auf die einsichtigste und auch für den mathematischen Laien verständliche Weise darlegen lässt.

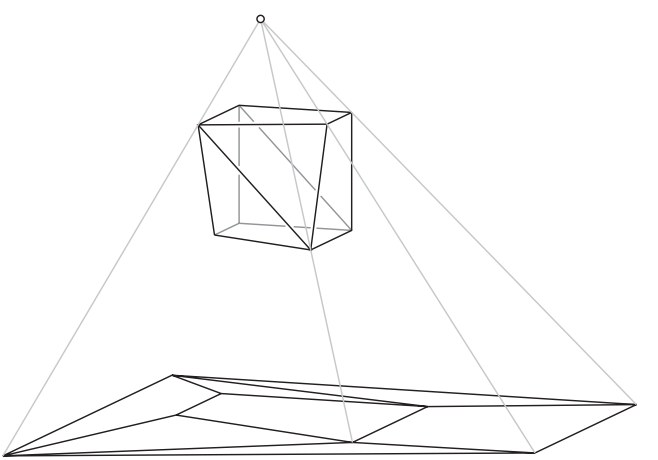
Der Auftakt ist die Idee, aus dem *räumlichen* Objekt, dem Polyeder, ein *ebenes* Objekt zu gewinnen.

Denken wir uns dazu irgendein konvexes Polyeder, z. B. dasjenige in der folgenden Figur.



Konvexes Polyeder

Für die folgende Argumentation ist es nützlich, wenn wir uns das Polyeder als Drahtmodell vorstellen, das wir über einem Tisch hochhalten, zum Beispiel so, dass die oberste Seitenfläche horizontal zu liegen kommt.
Denken wir uns weiter eine Lichtquelle in angemessener Nähe der obersten Seitenfläche. Das Polyeder wirft einen Schatten auf den Tisch. Bei obigem Beispiel sähe das Bild etwa wie folgt aus.



Drahtmodell des Polyeders mitsamt seinem Schatten (und ausgewählten Lichtstrahlen)

Die Lichtquelle sei so platziert, dass der Schatten jeder einzelnen Ecke und jeder einzelnen Kante *eindeutig* auszumachen sei, das heisst, es sollen weder die Schatten zweier Polyederecken zusammenfallen, noch die Schatten zweier Polyederkanten. Ausserdem sollen sich keine zwei Schatten von Kanten überschneiden.
Dieses Schattenbild bezeichnen wir fortan als *Netz*. In einem naheliegenden Sinn sprechen wir auch in Bezug auf das Netz von Ecken, Flächen, Kanten. Die Flächen des Netzes sind Vielecke. In unserem Beispiel sind es 4 Dreiecke und 3 Vierecke. Es ist aber auch denkbar, dass bei anderen Polyedern Fünf-, Sechsecke, und so weiter vorkommen. Das Netz des Dodekaeders beispielsweise würde aus Fünfecken bestehen. Das Netz der Bienenwabe würde, bei geeigneter Platzierung des Körpers, ein Sechseck enthalten.

Die Bedeutung des Netzes liegt in der Tatsache begründet, dass es die *vollständige Information* zur Ecken-, Flächen- und Kantenzahl des Polyeders einfängt! Es hat nämlich gleich viele Ecken und Kanten wie das Polyeder. Doch Achtung! Der Schatten der obersten Polyederfläche wird zum Rand des Netzes. Aus diesem Grund hat das Netz eine Fläche weniger als das Polyeder.
Im vorgeschlagenen Beispiel hat das Netz 8 Ecken und 14 Kanten, je genauso viele wie das Polyeder. Ausserdem besteht das Netz aus 7 Flächen (4 Dreiecke und 3 Vierecke), während das Polyeder deren 8 hat (4 Dreiecke und 4 Vierecke).

Mit den Bezeichnungen e, f, k für die Anzahl Ecken, Flächen und Kanten des Netzes, lässt sich der Zusammenhang zwischen Netz und Polyeder wie folgt notieren:

$$e = E,$$
$$f = F - 1 \text{ oder } F = f + 1,$$
$$k = K.$$

Gelingt es zu zeigen, dass für das Netz

$$e + f - k = 1$$

gilt, so folgt daraus, dass für das Polyeder

$$E + F - K = 2$$

sein muss. Dies, weil F, die Anzahl Flächen des Polyeders, um 1 grösser ist als f, die Anzahl Flächen des Netzes.

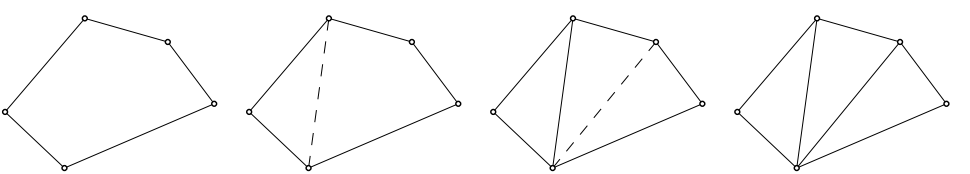
Natürlich ist mit dem Transfer der Information betreffend Ecken, Flächen, Kanten des Polyeders in die Ebene das Problem, die Vermutung zu beweisen, nicht gelöst. Es braucht eine weitere Idee!

Gibt es eine Möglichkeit, jedes nur denkbare Netz zu verändern, zu vereinheitlichen, zu *vereinfachen* und gleichzeitig den Überblick über das Verhalten $e + f - k$ zu behalten?

Erstaunlicherweise lautet die Antwort: ja!

Cauchy folgend, überzeugen wir uns, dass sich jedes Netz durch die Einführung zusätzlicher Kanten vollständig in Dreiecke zerlegen lässt. Man nennt diesen Prozess *Triangulation*.

Betrachten wir den Prozess der schrittweisen Triangulation genauer.
Je nach Beschaffenheit des Polyeders kann sein Netz einfacher oder komplizierter sein. Entscheidend ist, dass es sich aus lauter Vielecken zusammensetzt. Befinden sich Dreiecke darunter, bleiben diese zunächst unverändert. Vier-, Fünf-, Sechsecke und so weiter werden in Dreiecke unterteilt. Wir wollen die Triangulation am Beispiel eines Fünfecks verfolgen.



Triangulation eines Fünfecks

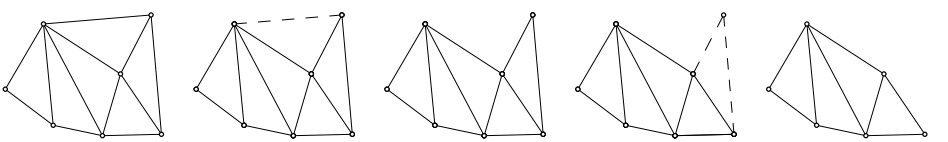
Die Einführung einer neuen Kante erhöht nebst der Anzahl Kanten auch die Anzahl Flächen um 1, während die Anzahl Ecken unverändert bleibt. Der Ausdruck «Ecken plus Flächen minus Kanten» ändert dabei seinen Wert nicht:

$$\underbrace{e + (f + 1) - (k + 1)}_{\text{Wert nach der Einführung einer neuen Kante}} = \underbrace{e + f - k}_{\text{Wert vor der Einführung einer neuen Kante}}.$$

Das eben Geschilderte ist völlig unabhängig von der Anzahl Ecken des Vielecks. Mit jedem anderen als dem Fünfeck liesse sich genauso verfahren.

Wenn das Netz also fertig trianguliert ist, das heisst vollständig in lauter Dreiecke unterteilt ist, hat der Ausdruck «Ecken plus Flächen minus Kanten» *denselben Wert* wie *vor* der *Triangulation!*

Als Nächstes, immer noch Cauchy folgend, bauen wir das Netz *vom Rand her* ab. Dies geschieht durch folgende zwei Operationen:
– Wir entfernen eine einzelne Randkante.
– Oder wir entfernen zwei Randkanten mitsamt ihrer gemeinsamen Ecke.



Veränderungen eines Stücks des Netzrandes beim Abbauprozess

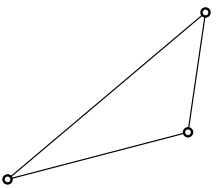
Bei der ersten Operation geht mit der entfernten Randkante auch eine Fläche verloren, während die Zahl der Ecken unverändert bleibt. Der Wert des Ausdruckes «Ecken plus Flächen minus Kanten» bleibt bei dieser Operation unverändert:

$$\underbrace{e + (f - 1) - (k - 1)}_{\text{Wert nach der Entfernung einer einzelnen Randkante}} = \underbrace{e + f - k}_{\text{Wert vor der Entfernung einer einzelnen Randkante}}.$$

Bei der zweiten Operation gehen mit der Entfernung zweier Kanten auch eine Fläche und eine Ecke verloren. Auch bei dieser Operation bleibt der Wert des Ausdruckes «Ecken plus Flächen minus Kanten» unverändert:

$$\underbrace{(e - 1) + (f - 1) - (k - 2)}_{\text{Wert nach der Entfernung zweier Randkanten mitsamt gemeinsamer Ecke}} = \underbrace{e + f - k}_{\text{Wert vor der Entfernung zweier Randkanten mitsamt gemeinsamer Ecke}}.$$

Den Abbauprozess setzen wir so lange fort, bis *ein einzelnes Dreieck übrigbleibt.*



Was vom Netz schliesslich übrigbleibt: ein Dreieck

Jetzt können wir den Wert von $e + f - k$ problemlos ermitteln. Für das Dreieck, mit seinen 3 Ecken, 1 Fläche und 3 Kanten, ist

$$e + f - k = 3 + 1 - 3 = 1.$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen haben sowohl die Triangulation als auch der Abbau des Netzes den Wert des Ausdruckes $e + f - k$ unverändert gelassen. Beim Dreieck ist dieser Wert gleich 1. Also muss er auch für das ursprüngliche Netz, das Schattenbild des Polyeders, gleich 1 sein! Voilà!

Damit ist für beliebige konvexe Polyeder bewiesen, dass $E + F - K$, da um 1 grösser als $e + f - k$, immer den Wert 2 hat!

Es sind sozusagen zwei Säulen, auf denen der Beweis ruht. Zum einen auf der Idee, die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Ecken, Flächen und Kanten vom Raum in die Ebene zu verlegen, ohne dabei die entscheidenden Informationen zu verlieren. Zum andern auf der Entdeckung, dass sich das Netz modifizieren und schliesslich zu einem Dreieck reduzieren lässt, ohne dass dabei der zur Diskussion stehende Ausdruck «Ecken plus Flächen minus Kanten» seinen Wert ändert. Wahrlich brillant! Ein Juwel der Begründungskunst!

Eulers Entdeckung nennt man ihm zu Ehren den *Euler'schen Polyedersatz.*

Er ist es, der vor rund zwanzig Jahren auf Platz 2 der «Top Ten» gelandet ist. Und ich bin mir praktisch sicher, dass eine heutige Umfrage unter Math-

ematikern – wenn überhaupt – nur geringfügige Verschiebungen innerhalb der vordersten Ränge nach sich zöge. Eulers Polyedersatz wäre auf jeden Fall weiterhin vertreten.

Es sei abschliessend wenigstens noch angedeutet, dass dem Euler'schen Polyedersatz nicht nur wegen seiner Schönheit eine prominente Rolle innerhalb der Mathematik zukommt. Es ist auch seine *Wirkungsmacht*, die ihn als wichtig auszeichnet.
Mit dem Euler'schen Polyedersatz (und seinen Beweisen) hat eine *neue Sichtweise* in die mathematische Welt Einzug gehalten. Ihr Wesen ist ein *Perspektivenwechsel*. Gemeint ist damit die Strategie, von der konkreten Gestalt des Studienobjekts (im vorliegenden Fall: konvexe Polyeder) abzusehen und im Hinblick auf eine bestimmte Eigenschaft, die *Essenz* (im vorliegenden Fall: das Netz), zu extrahieren. Dabei darf die «Essenz» eine (ganz) andere konkrete Gestalt annehmen. Es liesse sich etwa auch von der *Verlagerung* der Betrachtungen von einem Terrain auf ein anderes sprechen. Dieser Aspekt gehört mit zum *schönen Erbe*, das Euler mit seinem Polyedersatz hinterlassen hat.

Wer mehr wissen will …

Wer mehr über Eulers Leben erfahren will, greift mit Vorteil zu folgendem Bändchen aus der bewährten Reihe «rowohlts monographien».

Emil A. Fellmann: Leonhard Euler.
ISBN 3-499-50387-5.

Eine Zusammenstellung der «Top Ten», sowie allgemeinverständliche Ausführungen zu den einzelnen Sätzen, finden sich in Basieux' schön geschriebenem Buch.

Pierre Basieux: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze.
ISBN 3-499-60883-9 / ISBN 978-3-499-60883-4.

Wer anderen Beweisen, als dem im Artikel vorgestellten, nachgehen möchte, findet im Internet unter folgendem Link eine Auswahl.

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/

Für Interessierte mit einem gewissen mathematischen Flair empfiehlt sich das Werk von Richeson (in englischer Sprache). In diesem Buch erfährt der Leser u.a. einiges über weiterführende Ideen, die von der Beschäftigung mit dem Euler'schen Polyedersatz inspiriert worden sind.

David S. Richeson: Euler's Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology.
ISBN 978-0-691-12677-7 / ISBN 0-691-12677-1

Wer eine Ahnung vom Ringen um mathematische Erkenntnis gewinnen möchte, sei auf Lakatos' Buch hingewiesen. Lakatos entwickelt in Dialogform eine weitreichende Auseinandersetzung rund um den Euler'schen Polyedersatz. Dabei kommen auch philosophische und wissenschaftstheoretische Aspekte zur Sprache.

Imre Lakatos: Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen.
ISBN 3-528-08392-1.