Mathematik
Aufnahmeprüfung 2025

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Zeit: 2 Stunden

Rechner: TI30/TI34 oder vergleichbare.

Hinweis: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein, ansonsten werden keine Teilpunkte vergeben. Numerische Resultate sind - sofern nicht anders verlangt - auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	48

Vorname: **Name:**

Aufgabe 1

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $3x^2 - 7 \cdot \left(2x^2 - \left(4x - \frac{8}{7}\right)\right) - (8x + 16)$

(b) $2b \cdot \frac{12(ab)^3}{7b} : \frac{9a^3}{14b^2}$

Aufgabe 2

(a) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten x auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

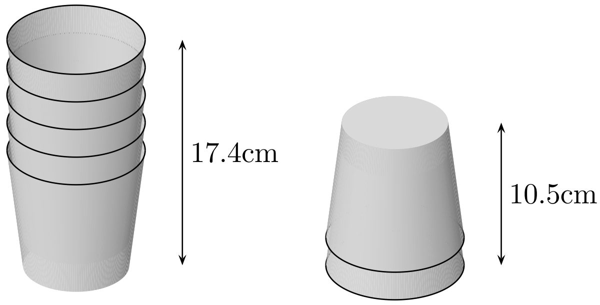
$$\frac{6x-9}{4} - \frac{3x-1}{8} + 1 = \frac{x}{2}$$

(b) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten k auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$$-k^2 = -k\left(k - \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3}(1-k)$$

Aufgabe 3

Ein Stapel mit 5 gleichen Bechern hat die Höhe 17.4 cm. Bei einem Stapel mit 2 Bechern misst die Höhe 10.5 cm.



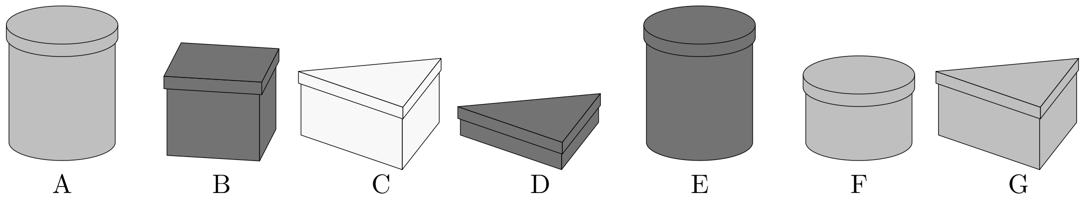
(a) Berechne die Höhe eines Bechers.

(b) Gib einen Term an, der die Höhe eines Stapels mit n Bechern angibt. Vereinfache den Term soweit wie möglich.

Aufgabe 4

Martin hat 7 Schachteln aufgestellt. Jede Schachtel hat eine von drei Formen, eine von drei Grautönen und und eine von drei Höhen. In eine der Schachteln hat Martin ein Goldstück gelegt. Seine Freunde Fiona, Grace und Holger sollen herausfinden, in welcher Schachtel dieses Goldstück liegt.

(a) Hier die Schachteln:

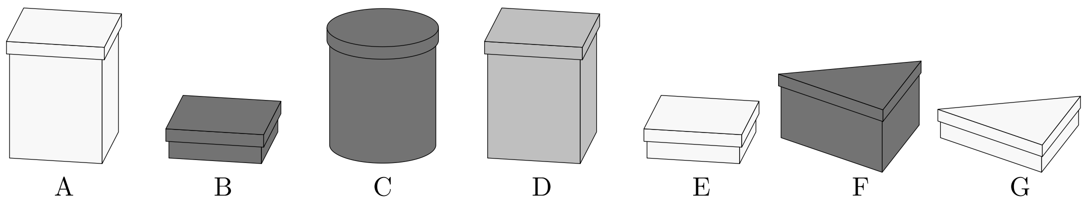


Fiona kennt von der Schachtel mit dem Goldstück nur die Form, Grace nur den Grauton und Holger nur die Höhe.

Martin fragt:	«Weisst Du, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Fiona:	«Nein, ich weiss es nicht eindeutig.»
Grace:	«Nein, es könnte in mehreren liegen.»
Holger:	«Nein, aber ich kann eine Schachtel ausschliessen.»

In welchen der Schachteln liegt das Goldstück sicher *nicht*?

(b) Nun stellt Martin 7 neue Schachteln hin, wiederum ist in einer ein Goldstück versteckt. Auch diesmal kennt Fiona nur die Form, Grace nur den Grauton und Holger nur die Höhe.



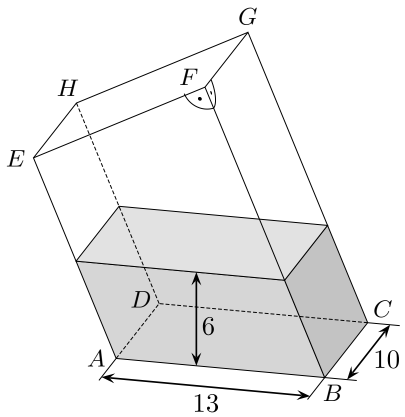
Du hörst daraufhin den folgenden Dialog:

Martin:	«Weisst Du, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Die drei Freunde:	«Noch weiss ich es nicht»
Martin:	«Weisst Du nun, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Die drei Freunde:	«Noch immer weiss ich es nicht»
Martin:	«Weisst Du jetzt, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Die drei Freunde:	«Jetzt weiss ich es!»

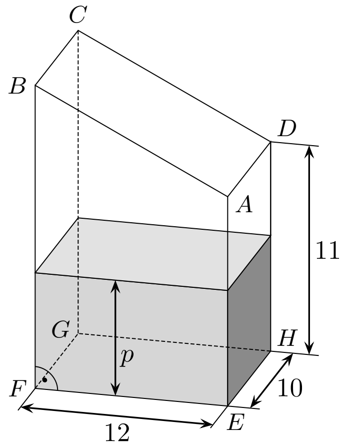
In welcher Schachtel liegt das Goldstück?

Aufgabe 5

Ein Plexiglasprisma steht auf der rechteckigen Grundfläche $ABCD$. Es ist teilweise mit Wasser gefüllt, siehe die Figur 1. Der Pegelstand ist auf der Höhe von 6 cm. Nun wird das Plexiglasprisma umgedreht, sodass es auf der rechteckigen Fläche $EFGH$ steht, siehe die Figur 2.



Figur 1



Figur 2

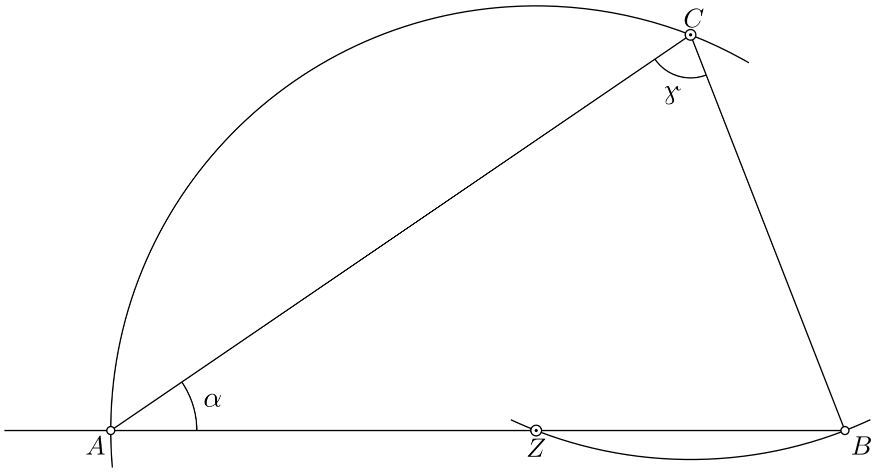
Die Kantenlängen des Prismas sind in der Figur in cm angegeben.

(a) Berechne den Pegelstand p nach dem Umdrehen.

(b) Berechne das Volumen des Plexiglasprismas.

Aufgabe 6

Betrachte folgende Figur. Die Punkte Z und C sind die Zentren der eingezeichneten Kreisbogen.

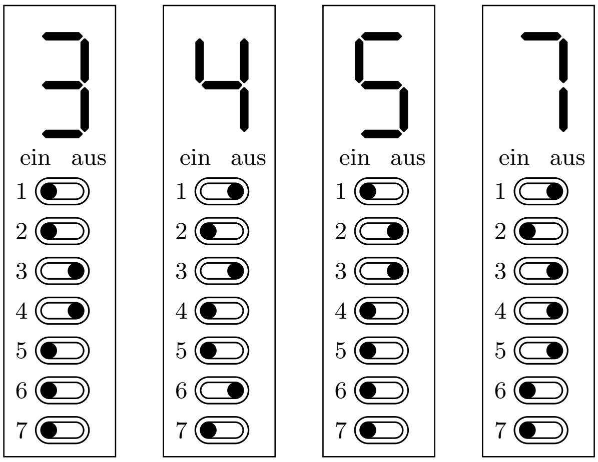


(a) Berechne γ, wenn $\alpha = 39°$.

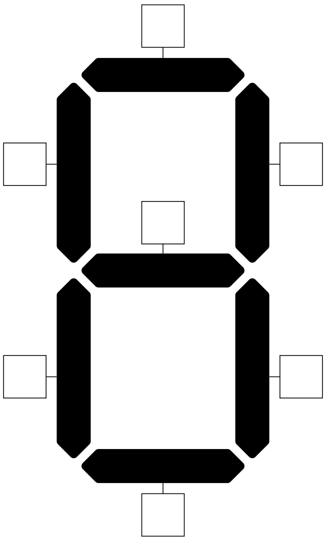
(b) Gib an, wie sich allgemein γ aus α berechnet. Verwende dazu einen vollständig vereinfachten Term.

Aufgabe 7

Ziffern werden digital durch einzelne Elemente, sog. *Segmente* angezeigt. Bei vier verschiedenen Ziffern sind die Schalterstellungen angegeben. Jeder Schalter kontrolliert genau ein Segment.



Schreibe in die Kästchen zu jedem Segment die Nummer des entsprechenden Schalters. Eine Begründung ist nicht nötig.



Aufgabe 8

Löse beide Teilaufgaben durch Aufstellen einer Gleichung.

(a) Eine Treppe hat 12 Stufen. Würde die Höhe jeder Stufe um 2.7 cm vergrössert, bräuchte es zwei Stufen weniger. Wie hoch ist eine Stufe?

(b) Bei einem Rechteck mit Umfang 24 cm ist eine Seite um 3 cm länger als die andere. Wie lang ist die kürzere der beiden Rechteckseiten?

Aufgabe 9

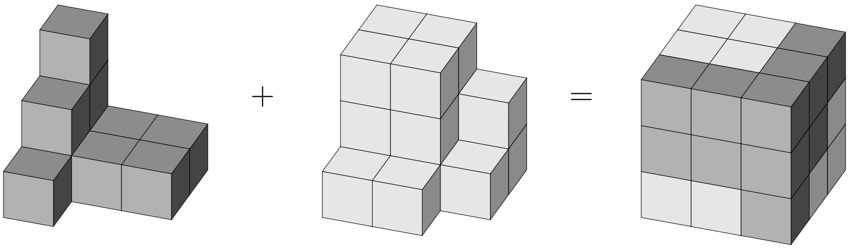
Lena hat ein neues Fahrrad und kauft sich ein Schloss, bei dem man drei Ziffern von 0 bis 9 für die Kombination einstellen muss.

(a) Wie viele Möglichkeiten hat Lena mit ihren drei Lieblingsziffern 1, 5 und 7 die Kombination des Schlosses zu wählen, wenn alle drei vorkommen müssen.

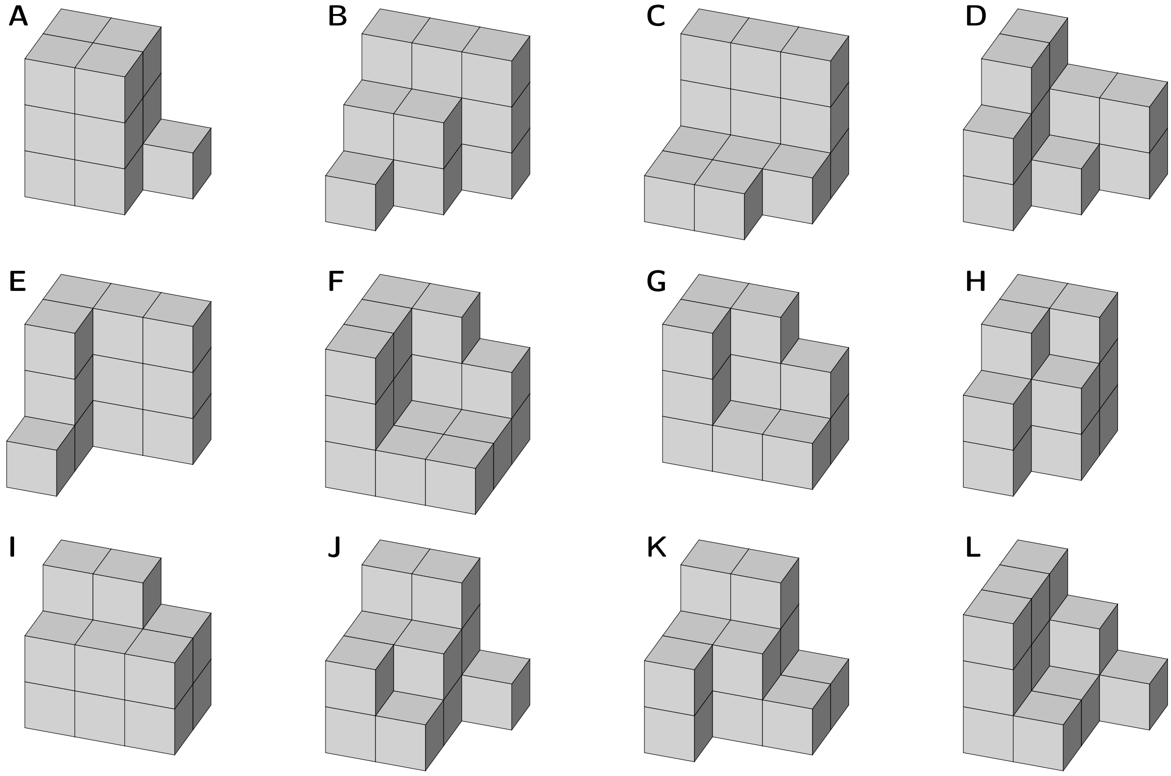
(b) Sebastian möchte das Schloss von Lena knacken und vermutet, dass ihre Lieblingsziffern je einmal darin vorkommen. Leider hat er sie vergessen, weiss aber noch, dass sie alle ungerade sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Sebastian beim Versuch, den Code zu knacken?

Aufgabe 10

Die folgenden zwei Würfelkörper können zu einem Würfel mit 27 Würfelchen zusammengesetzt werden.



Die folgende Abbildung zeigt 12 Würfelkörper.



Suche vier Paare von Würfelkörpern, die sich je zu einem Würfel zusammensetzen. Schreibe die entsprechenden Buchstaben in die Felder:

A		B					

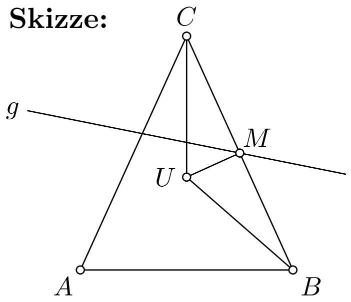
Aufgabe 11

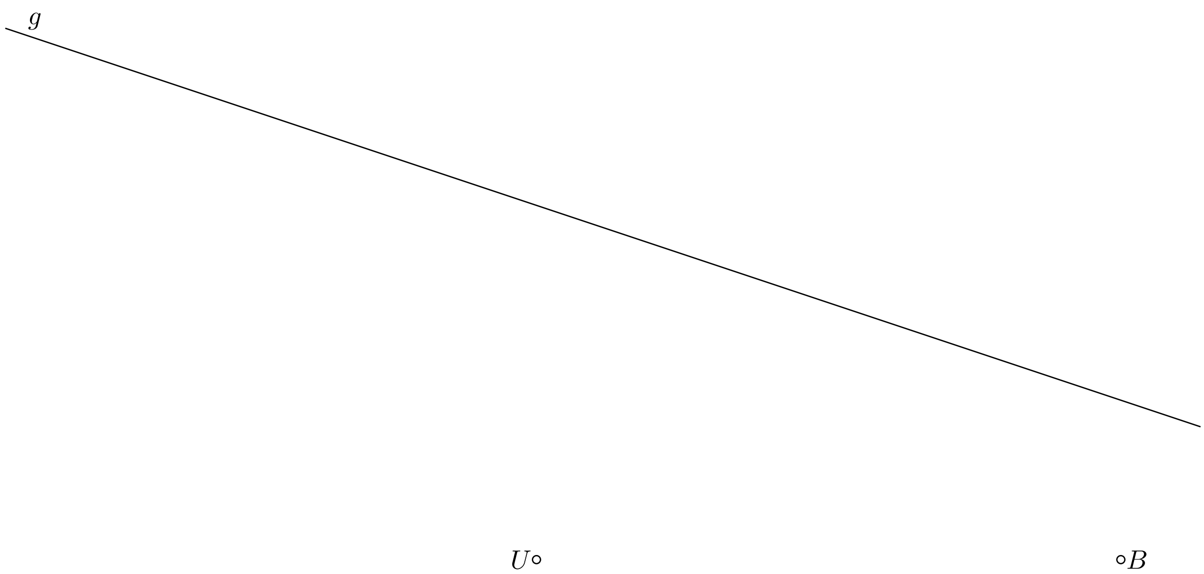
Gegeben sind eine Gerade g und zwei Punkte B und U.

Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{CA} = \overline{CB}$ so, dass der gegebene Punkt B eine Ecke ist, der gegebene Punkt U das Umkreiszentrum ist und weiter die Seitenmitte M der Seite BC auf der gegebenen Geraden g liegt.

Betrachte die Skizze genau und füge allenfalls Ergänzungen ein. Ein Lösungsweg ist nicht notwendig, die Konstruktion sollte aber klar ersichtlich sein.

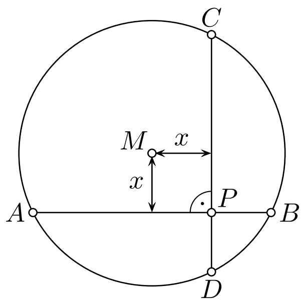
Skizze:





Aufgabe 12

Gegeben ist ein Kreis mit Zentrum M und Radius 10 cm und vier Punkte A, B, C und D auf dem Kreis, siehe Figur 1. Die Strecken AB und CD stehen senkrecht zueinander und sind gleich lang. Das Kreiszentrum M hat daher denselben Abstand x zu beiden Strecken.

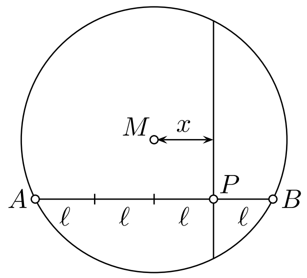


Figur 1

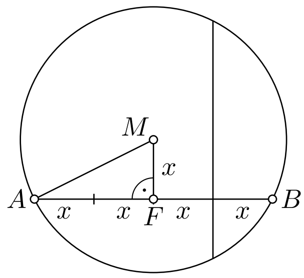
Gregory hat dazu die folgende Aufgabe erhalten:

Aufgabe: *Wie muss x gewählt werden, damit $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{BP}$ gilt?*

Gregory unterteilt dazu den längeren Teil der Strecke AP in drei gleich lange Teilstücke der Länge ℓ, siehe Figur 2.



Figur 2



Figur 3

Somit ist die Strecke AB in vier Teilstücke unterteilt und misst insgesamt 4ℓ. Der Mittelpunkt F von AB liegt senkrecht unterhalb von M. Folglich ist $\ell = x$. Daher misst der längere Teil der Strecke $3x$ und der kürzere x. So entsteht das rechtwinklige Dreieck AFM mit den Katheten $2x$ und x, siehe Figur 3. Damit lässt sich die Länge x wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} (2x)^2 + x^2 &= 10^2 && \big|\ \text{TU} \\ 5x^2 &= 100 && \big|\ \div 5 \\ x^2 &= 20 && \big|\ \sqrt{\ } \\ x &= \sqrt{20} \approx 4.47\,\text{cm} \end{aligned}$$

Berechne x so, dass $\overline{AP} = 4 \cdot \overline{BP}$ gilt.

Eine Argumenation wie diejenige von Gregory kann dabei hilfreich sein.

Mathematik
Aufnahmeprüfung 2025

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	48

Aufgabe 1 [4P]

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $3x^2 - 7 \cdot \left(2x^2 - \left(4x - \frac{8}{7}\right)\right) - (8x + 16)$

(b) $2b \cdot \dfrac{12(ab)^3}{7b} : \dfrac{9a^3}{14b^2}$

(a)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7 \cdot \left(2x^2 - \left(4x - \tfrac{8}{7}\right)\right) - (8x + 16) &= 3x^2 - 14x^2 + 7 \cdot \left(4x - \tfrac{8}{7}\right) - 8x - 16 \\ &= 3x^2 - 14x^2 + 28x - 8 - 8x - 16 \\ &= \underline{\underline{-11x^2 + 20x - 24}} \end{aligned}$$

[2 P]

(b)

$$\begin{aligned} 2b \cdot \frac{12(ab)^3}{7b} : \frac{9a^3}{14b^2} &= \frac{24a^3b^3}{7} : \frac{9a^3}{14b^2} \\ &= \frac{24a^3b^3}{7} \cdot \frac{14b^2}{9a^3} \\ &= \frac{24a^3b^3 \cdot 2b^2}{9a^3} \\ &= \frac{8b^3 \cdot 2b^2}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{16b^5}{3}}}. \end{aligned}$$

[2 P]

Aufgabe 2 [4P]

(a) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten x auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$\frac{6x-9}{4} - \frac{3x-1}{8} + 1 = \frac{x}{2}$

(b) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten k auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$-k^2 = -k\left(k - \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3}(1-k)$

(a)

$$\begin{aligned} \frac{6x-9}{4} - \frac{3x-1}{8} + 1 &= \frac{x}{2} && \mid \cdot 8 \\ 2\cdot(6x-9) - (3x-1) + 8 &= 4x && \mid \text{TU} \\ 12x - 18 - 3x + 1 + 8 &= 4x && \mid -4x \\ 5x - 9 &= 0 && \mid +9 \\ 5x &= 9 && \mid \div 5 \\ x &= \underline{\underline{\tfrac{9}{5}}} \end{aligned}$$

[2 P]

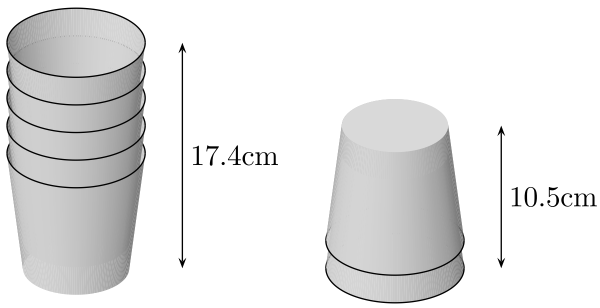
(b)

$$\begin{aligned} -k^2 &= -k\left(k - \tfrac{5}{3}\right) - \tfrac{2}{3}(1-k) && \mid \text{TU} \\ -k^2 &= -k^2 + \tfrac{5}{3}k - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}k && \mid +k^2 \\ 0 &= \tfrac{7}{3}k - \tfrac{2}{3} && \mid +\tfrac{2}{3} \\ \tfrac{7}{3}k &= \tfrac{2}{3} && \mid \cdot 3 \\ 7k &= 2 && \mid \div 7 \\ k &= \underline{\underline{\tfrac{2}{7}}} \end{aligned}$$

[2 P]

Aufgabe 3 [4P]

Ein Stapel mit 5 gleichen Bechern hat die Höhe 17.4 cm. Bei einem Stapel mit 2 Bechern misst die Höhe 10.5 cm.



(a) Berechne die Höhe eines Bechers.

(b) Gib einen Term an, der die Höhe eines Stapels mit n Bechern angibt. Vereinfache den Term soweit wie möglich.

(a) Der linke Stapel hat drei Becher mehr und ist um $17.4 - 10.5 = 6.9$ Zentimeter höher. Somit erhöht jeder Becher die Höhe des Stapels um $6.9\,\text{cm} \div 3 = 2.3\,\text{cm}$. Für die Höhe eines Bechers ergibt sich somit die Höhe $h = 10.5 - 2.3 = \underline{\underline{8.2\text{ cm}}}$. **[2 P]**

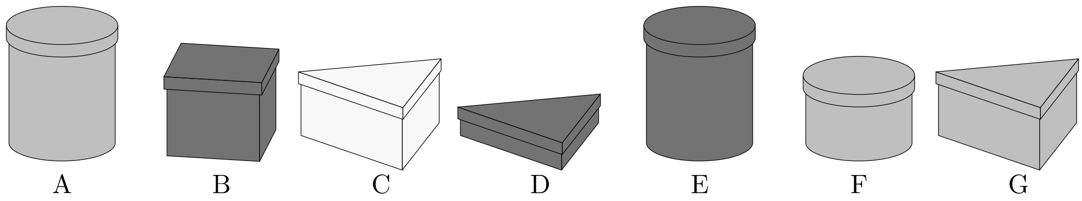
[2 P]

(b) Bei n Bechern hat der Stapel die Höhe $8.2\,\text{cm} + (n-1)\cdot 2.3\,\text{cm} = \underline{\underline{5.9\,\text{cm} + n\cdot 2.3\,\text{cm}}}$.

Aufgabe 4 [4P]

Martin hat 7 Schachteln aufgestellt. Jede Schachtel hat eine von drei Formen, eine von drei Grautönen und und eine von drei Höhen. In eine der Schachteln hat Martin ein Goldstück gelegt. Seine Freunde Fiona, Grace und Holger sollen herausfinden, in welcher Schachtel dieses Goldstück liegt.

(a) Hier die Schachteln:



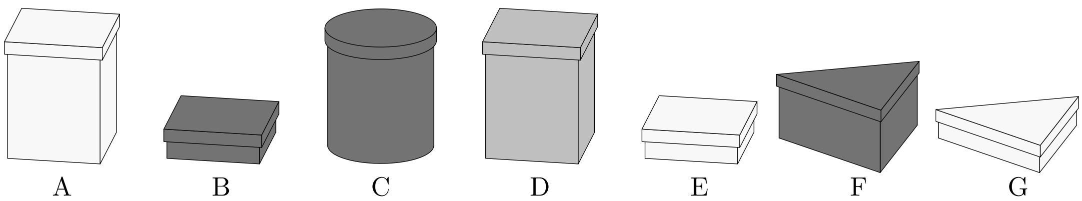
Fiona kennt von der Schachtel mit dem Goldstück nur die Form, Grace nur den Grauton und Holger nur die Höhe.

Martin fragt:	«Weisst Du, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Fiona:	«Nein, ich weiss es nicht eindeutig.»
Grace:	«Nein, es könnte in mehreren liegen.»
Holger:	«Nein, aber ich kann eine Schachtel ausschliessen.»

In welchen der Schachteln liegt das Goldstück sicher *nicht*?

Sicher nicht in **B**, **C** oder **D**: Es gibt nur eine Schachtel mit quadratischer Grundfläche: **B**. Wäre das Goldstück in **B**, so wüsste Fiona dies. Also liegt das Goldstück nicht in **B**. Nur **C** ist weiss. Daher kann das Goldstück nicht in **C** liegen, da sonst Grace es wüsste. Nur **D** ist niedrig. Daher kann das Goldstück nicht in **D** liegen, da sonst Holger es wüsste. [2 P]

(b) Nun stellt Martin 7 neue Schachteln hin, wiederum ist in einer ein Goldstück versteckt. Auch diesmal kennt Fiona nur die Form, Grace nur den Grauton und Holger nur die Höhe.



Du hörst daraufhin den folgenden Dialog:

Martin:	«Weisst Du, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Die drei Freunde:	«Noch weiss ich es nicht»
Martin:	«Weisst Du nun, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Die drei Freunde:	«Noch immer weiss ich es nicht»
Martin:	«Weisst Du jetzt, in welcher Schachtel das Goldstück liegt?»
Die drei Freunde:	«Jetzt weiss ich es!»

In welcher Schachtel liegt das Goldstück?

Nach der ersten Frage kann man **C** (Form), **D** (Grauton) und **F** (Höhe) ausschliessen.

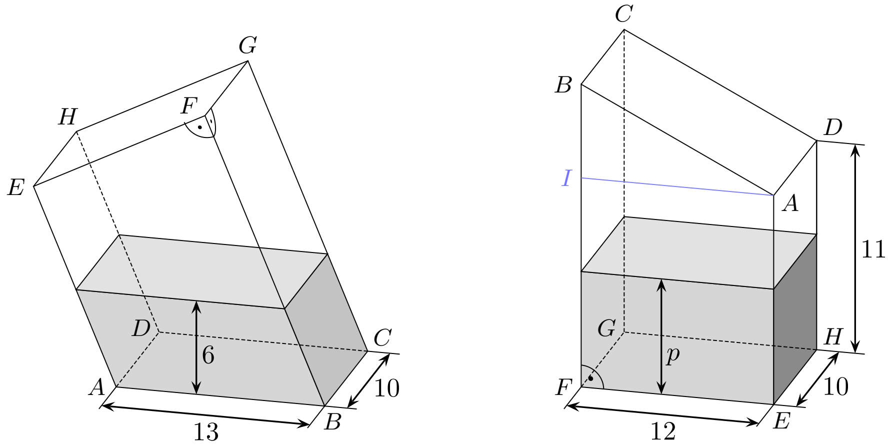
Danach verbleiben: **A**, **B**, **E** und **G** für das zweite Mal, bei dem Martin seine Frage stellt.

Nun kann man **G** (Form), **B** (Grauton) und **A** (Höhe) ausschliessen.

Es bleibt die Schachtel **E**. [2 P]

Aufgabe 5 [4P]

Ein Plexiglasprisma steht auf der rechteckigen Grundfläche $ABCD$. Es ist teilweise mit Wasser gefüllt, siehe die Figur 1. Der Pegelstand ist auf der Höhe von 6 cm. Nun wird das Plexiglasprisma umgedreht, sodass es auf der rechteckigen Fläche $EFGH$ steht, siehe die Figur 2.



Figur 1 Figur 2

Die Kantenlängen des Prismas sind in der Figur in cm angegeben.

(a) Berechne den Pegelstand p nach dem Umdrehen.

(b) Berechne das Volumen des Plexiglasprismas.

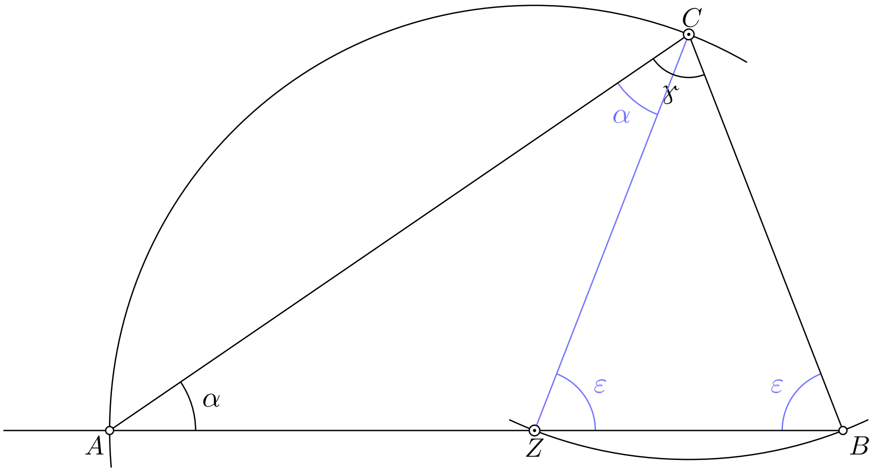
(a) Das Volumen des Wassers berechnet sich in der Figur 1 als $V_{\text{Wasser}} = 6\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm}$.
In der Figur 2 ist das Wasservolumen $V_{\text{Wasser}} = p \cdot 12\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm}$.
Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} p \cdot 12\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} &= 6\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} && \mid \div 10\,\text{cm} \\ p \cdot 12\,\text{cm} &= 6\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm} && \mid \div 12\,\text{cm} \\ p &= \frac{6\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = \frac{13\,\text{cm}}{2} = \underline{\underline{6.5\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

(b) Sei I der Punkt der Strecke FB, der auf derselben Höhe über $EFGH$ liegt wie A. Das Dreieck IAB ist dann rechtwinklig mit Hypotenuse $\overline{AB} = 13\,\text{cm}$ und Kathete $\overline{IA} = 12\,\text{cm}$. Somit berechnet sich IB als: $\overline{IB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{IA}^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$.
Somit ist $\overline{FB} = \overline{FI} + \overline{IB} = 11 + 5 = 16\,\text{cm}$. Die Fläche $ABEF$ ist ein Trapez mit Länge der Mittellinie $m = \frac{16+11}{2} = 13.5\,\text{cm}$. Es hat somit den Flächeninhalt $13.5 \cdot 12 = 162\,\text{cm}^2$. Das Volumen des Plexiglasprismas berechnet sich schliesslich als $162 \cdot 10 = \underline{\underline{1620\,\text{cm}^3}}$.

Aufgabe 6 [4P]

Betrachte folgende Figur. Die Punkte Z und C sind die Zentren der eingezeichneten Kreisbogen.



(a) Berechne γ, wenn $\alpha = 39°$.

(b) Gib an, wie sich allgemein γ aus α berechnet. Verwende dazu einen vollständig vereinfachten Term.

(a) Da das Dreieck AZC gleichschenklig ist, gilt auch $\sphericalangle ACZ = 39°$ und somit $\sphericalangle AZC = 180° - 2 \cdot 39° = 102°$. Somit ist $\varepsilon = \sphericalangle BZC = 180° - 102° = 78°$. **[1 P]**

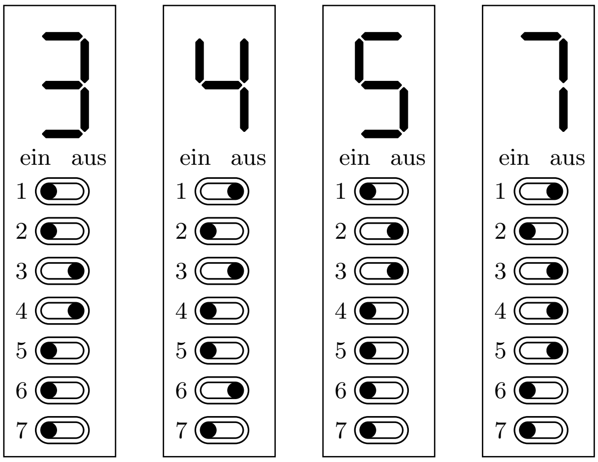
Weil das Dreieck ZBC gleichschenklig ist, gilt auch $\sphericalangle ZBC = 78°$ und somit ist $\sphericalangle ZCB = 180° - 2 \cdot 78° = 24°$. Somit folgt $\gamma = \sphericalangle ACZ + \sphericalangle ZCB = 39° + 24° = 63°$. **[1 P]**

(b) Die Berechnung folgt denselben Schritten wie in (a): $\sphericalangle AZC = 180° - 2 \cdot \alpha$. Daraus folgt $\varepsilon = 180° - \sphericalangle AZC = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$. **[1 P]**

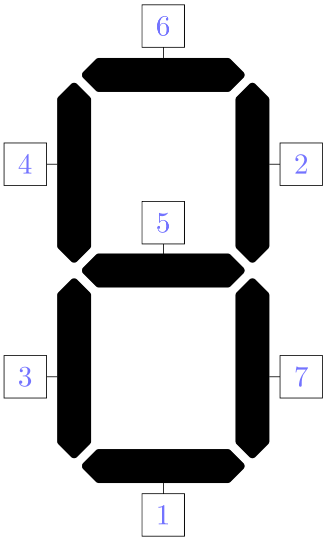
Nun folgt $\sphericalangle ZCB = 180° - 2\varepsilon = 180° - 4\alpha =$. Für den Winkel γ folgt $\gamma = \sphericalangle ACZ + \sphericalangle ZCB = \alpha + 180° - 4\alpha = \underline{\underline{180° - 3\alpha}}$. **[1 P]**

Aufgabe 7 [4P]

Ziffern werden digital durch einzelne Elemente, sog. *Segmente* angezeigt. Bei vier verschiedenen Ziffern sind die Schalterstellungen angegeben. Jeder Schalter kontrolliert genau ein Segment.



Schreibe in die Kästchen zu jedem Segment die Nummer des entsprechenden Schalters. Eine Begründung ist nicht nötig.



Der Ziffer 3 entnimmt man, dass die Schalter 3 und 4 zuständig sind für die zwei linken Segmente. Der Vergleich mit der Ziffer 4 ergibt, dass der Schalter 4 das obere linke Segment kontrolliert und folglich der Schalter 3 das untere linke Segment.

Nun betrachtet man nochmals die Ziffer 4. Im Vergleich zur Ziffer 3 sind noch die Schalter 1 und 6 aus und das untere und obere Segment fehlen. Der Vergleich mit der Ziffer 7 liefert, dass der Schalter 1 das untere und der Schlater 6 das obere Segment kontrolliert. Auch findet man, dass der Schalter 5 das mittlere Segment kontrollieren muss, da dies das einzige Segment ist, das bei den Ziffern 3, 4 und 5 ein ist, aber bei 7 aus.

Die Zuständigkeiten der verbleibenden zwei Schalter, 2 und 7, entnimmt man dem Vergleich der Ziffern 5 und 3. **[4 P]**

Aufgabe 8 [4P]

Löse beide Teilaufgaben durch Aufstellen einer Gleichung.

(a) Eine Treppe hat 12 Stufen. Würde die Höhe jeder Stufe um 2.7 cm vergrössert, bräuchte es zwei Stufen weniger. Wie hoch ist eine Stufe?

(b) Bei einem Rechteck mit Umfang 24 cm ist eine Seite um 3 cm länger als die andere. Wie lang ist die kürzere der beiden Rechteckseiten?

(a) Sei x die Höhe der Stufen in Zentimeter. Dann ist $12x$ die Höhe der Treppe. Eine um 2.7 cm höhere Stufe hätte die Höhe $x+2.7$ und eine Treppe mit 2 Stufen weniger, also mit 10 Stufen hätte die Höhe $10\cdot(x+2.7)$. So ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 12x &= 10\cdot(x+2.7) && \mid \text{TU} \\ 12x &= 10x+27 && \mid -10x \\ 2x &= 27 && \mid \div 2 \\ x &= \underline{\underline{13.5\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

[2 P]

(b) Sei x die kürzere der zwei Rechteckseiten in Zentimeter. Dann misst die längere Seite $x+3$ und der Umfang ist dann $2x+2(x+3)$. Somit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 2x+2(x+3) &= 24 && \mid \text{TU} \\ 2x+2x+6 &= 24 && \mid -6 \\ 4x &= 18 && \mid \div 4 \\ x &= \underline{\underline{4.5\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

[2 P]

Aufgabe 9 [4P]

Lena hat ein neues Fahrrad und kauft sich ein Schloss, bei dem man drei Ziffern von 0 bis 9 für die Kombination einstellen muss.

(a) Wie viele Möglichkeiten hat Lena mit ihren drei Lieblingsziffern 1, 5 und 7 die Kombination des Schlosses zu wählen, wenn alle drei vorkommen müssen.

(b) Sebastian möchte das Schloss von Lena knacken und vermutet, dass ihre Lieblingsziffern je einmal darin vorkommen. Leider hat er sie vergessen, weiss aber noch, dass sie alle ungerade sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Sebastian beim Versuch, den Code zu knacken?

(a) Für die Einerziffer hat Lena drei Möglichkeiten: 1,5 oder 7. Ist die Einerziffer gewählt, so bleiben ihr noch zwei Ziffern für die Zehnerziffer. Ist diese auch gewählt, so bleibt ihr nur noch eine Zahl für die Hunderterziffer des Codes. Sie hat also $3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{6}}$ Möglichkeiten.

Die möglichen Codes können auch explizit angegeben werden:

$$157, \quad 175, \quad 517, \quad 571, \quad 715 \quad \text{und} \quad 751.$$

[2 P]

(b) Sebastian hat für die Einerziffer 5 Möglichkeiten, nämlich die Ziffern 1,3,5,7 und 9. Für die Zehnerziffer verbleiben ihm dann noch 4 dieser Ziffern und für die Hunderterziffer noch 3. Somit hat Sebastian $5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\underline{60}}$ Möglichkleiten.

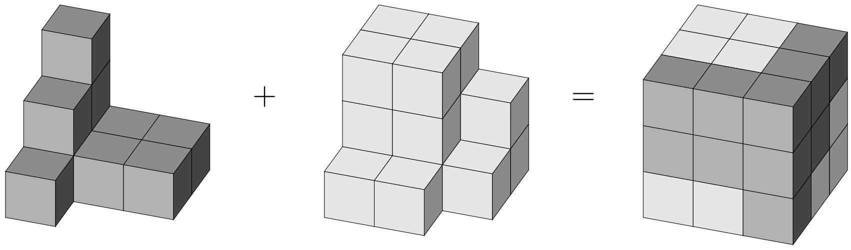
Alternativ kann man alle Codes mit der 1 als Einerziffern aufschreiben:

$$531, \quad 731, \quad 931, \quad 351, \quad 751, \quad 951, \quad 371, \quad 571, \quad 971, \quad 391, \quad 591 \quad \text{und} \quad 791.$$

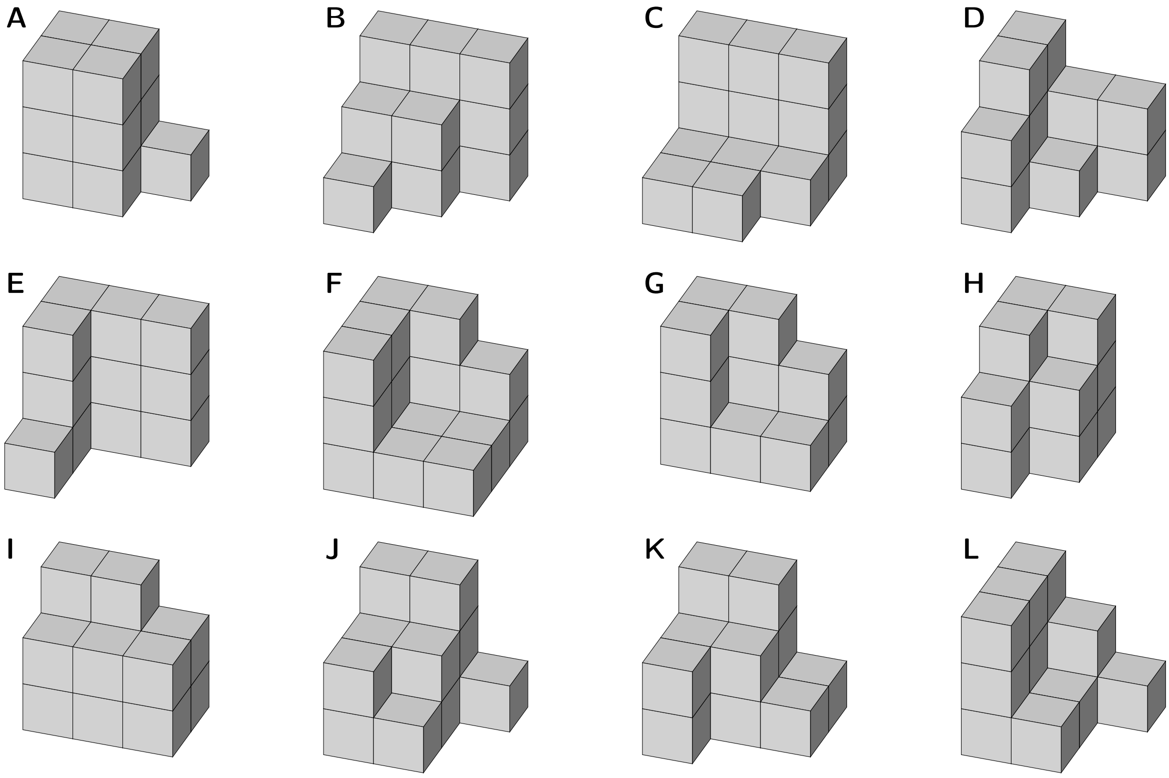
Mit jeder möglichen Einerziffer gibt es 12 Möglichkeiten. Also hat Sebatsian insgesamt $5 \cdot 12 = \underline{\underline{60}}$ Möglichkeiten. **[2 P]**

Aufgabe 10 [4P]

Die folgenden zwei Würfelkörper können zu einem Würfel mit 27 Würfelchen zusammengesetzt werden.



Die folgende Abbildung zeigt 12 Würfelkörper.



Suche vier Paare von Würfelkörpern, die sich je zu einem Würfel zusammensetzen. Schreibe die entsprechenden Buchstaben in die Felder:

[4 P]

A	C	B	G	D	J	E	I

Eine weitere Lösung ist: **H L**.

Die Würfelkörper **F** und **K** passen zu keinem anderen Teil.

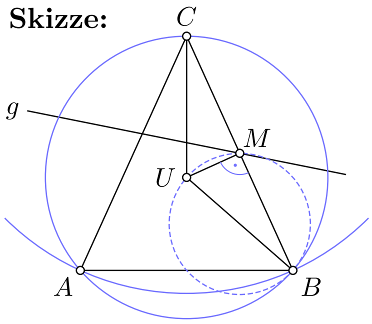
Aufgabe 11 [4P]

Gegeben sind eine Gerade g und zwei Punkte B und U.

Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{CA} = \overline{CB}$ so, dass der gegebene Punkt B eine Ecke ist, der gegebene Punkt U das Umkreiszentrum ist und weiter die Seitenmitte M der Seite BC auf der gegebenen Geraden g liegt.

Betrachte die Skizze genau und füge allenfalls Ergänzungen ein. Ein Lösungsweg ist nicht notwendig, die Konstruktion sollte aber klar ersichtlich sein.

Skizze:

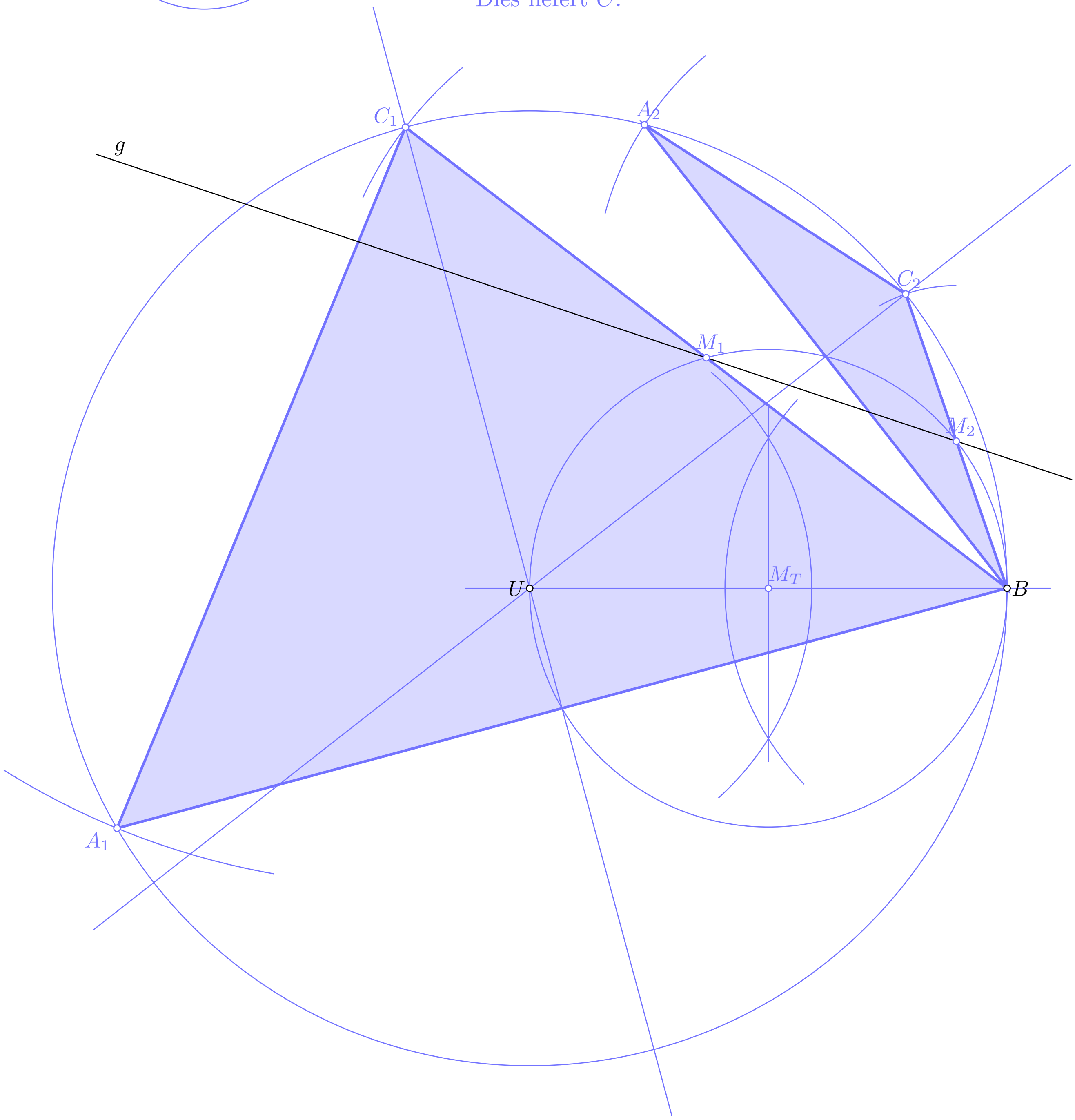


Lösungsweg:

1. Umkreis zeichnen
2. Da $\sphericalangle BMU = 90°$, liegt M auf dem Thaleskreis über BU.
3. M ist Schnittpunkt von g mit dem Thaleskreis (2 Lösungen).
4. B an M spiegeln liefert C.
5. Kreis um C mit Radius $\overline{CB}$ schneiden mit Umkreis liefert A.

2. Lösungsweg:

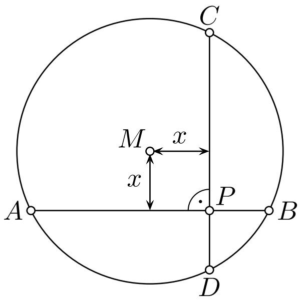
1. Umkreis zeichnen
2. Spiegle Parallele durch B zu g an g und schneide mit Umkreis. Dies liefert C.



[4 P]

Aufgabe 12 [4P]

Gegeben ist ein Kreis mit Zentrum M und Radius 10 cm und vier Punkte A, B, C und D auf dem Kreis, siehe Figur 1. Die Strecken AB und CD stehen senkrecht zueinander und sind gleich lang. Das Kreiszentrum M hat daher denselben Abstand x zu beiden Strecken.

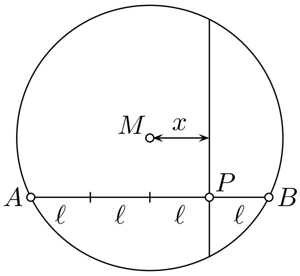


Figur 1

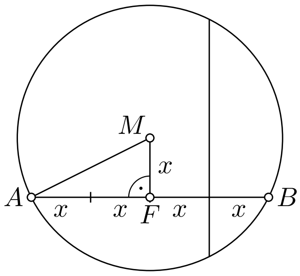
Gregory hat dazu die folgende Aufgabe erhalten:

Aufgabe: *Wie muss x gewählt werden, damit $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{BP}$ gilt?*

Gregory unterteilt dazu den längeren Teil der Strecke AP in drei gleich lange Teilstücke der Länge ℓ, siehe Figur 2.



Figur 2



Figur 3

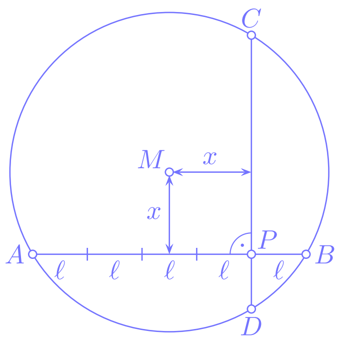
Somit ist die Strecke AB in vier Teilstücke unterteilt und misst insgesamt 4ℓ. Der Mittelpunkt F von AB liegt senkrecht unterhalb von M. Folglich ist $\ell = x$. Daher misst der längere Teil der Strecke $3x$ und der kürzere x. So entsteht das rechtwinklige Dreieck AFM mit den Katheten $2x$ und x, siehe Figur 3. Damit lässt sich die Länge x wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} (2x)^2 + x^2 &= 10^2 && \mid \text{TU} \\ 5x^2 &= 100 && \mid \div 5 \\ x^2 &= 20 && \mid \sqrt{} \\ x &= \sqrt{20} \approx 4.47\,\text{cm} \end{aligned}$$

Berechne x so, dass $\overline{AP} = 4 \cdot \overline{BP}$ gilt.

Eine Argumenation wie diejenige von Gregory kann dabei hilfreich sein.

Hier wird AB in 5 gleich lange Stücke der Länge ℓ unterteilt. Somit ist $x = \frac{3}{2}\ell$ und es gilt die Gleichung $(\frac{5}{2}\ell)^2 + (\frac{3}{2}\ell)^2 = 100$. Daraus schliesst man $\ell^2 = \frac{400}{34} = \frac{200}{17}$. Somit ist $x = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{200}{17}}}}\,\text{cm} \approx \underline{\underline{5.14\,\text{cm}}}$.



[4 P]